კვაზი–ხარისხების ზოგიერთი თვისება

როლანდ ომანაძე

E-mail: roland.omanadze@tsu.ge

ი.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, მათემა–

ტიკის დეპარტამენტი. ჭავჭავაძის პრ.1, 0218 თბილისი, საქართველო

ტენენბაუმმა (იხ. [3, გვ.159]) ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეებზე განსაზღვრა კვაზი–დაყვანადობის (Q -დაყვანადობის) ცნება შედეგნაირად: A სიმრავლე *კვაზი–დაყვანადია* B სიმრავლეზე (სიმბოლურად: $A \leq_Q B$) თუ არსებობს ისეთი რეკურსიული ფუნქცია f, რომ ყოველი $x\epsilon\omega$ (სადაც ω აღნიშნავს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს),

$$x\epsilon A \ \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B.$$

ამ დაყვანადობით ბუნებრივად განისაზღვრება კვაზი–ხარისხის (Q–ხარისხის) ცნება.

ბატირშინმა [2] აჩვენა, რომ არსებობს არარეკურსიული რ.გ. Q–ხარისხი, რომელიც შეიცავს ერთადერთ რ.გ. m–ხარისხს.

ქვემოთ მოცემული თეორემა 1 აჩვენებს, რომ ყოველი არარეკურსიული რ.გ. Q–ხარისხი შეიცავს სრულყოფილ სიმრავლეს [2]. ამ თეორემის შედეგი 3 აძლიერებს და აძლევს საბოლოო სახეს ბატირშინის ზემოთ მითითებულ შედეგს.

მოყვანილი აღნიშვნები და ტერმინოლოგია სტანდარტულია და შეიძლება მოიძებნოს [3]–ში.

თეორემა 1. ყოველი არარეკურსიული რ.გ. Q–ხარისხი შეიცავს სრულყოფილ სიმრავლეს.

შედეგი 1. არარეკურსიული რ.გ. Q–ხარისხი შეიცავს ერთადერთ რ.გ. m–ხარისხს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის შეიცავს ერთადერთ 1–ხარისხს.

შედეგი 2. ყოველი არარეკურსიული რ.გ. Q–ხარისხი შეიცავს რ.გ. m–ხარისხს, რომელიც შედგება ერთადერთი 1–ხარისხისგან.

შედეგი 3. არსებობს არარეკურსიული რ.გ. Q–ხარისხი შეიცავს ერთადერთ რ.გ. 1–ხარისხს.

თეორემა 2. ვთქვათ K კრეატიული სიმრავლეა. მაშინ არსებობს $\Sigma_2^0 - \Delta_2^0$ სიმრავლე B, რომელიც Q-არასადარია K სიმრავლესთან და ყოველი რ.გ. W სიმრავლისთვის, თუ $W \leq_Q B$, მაშინ $W \leq_Q \emptyset$.

შედეგი 1. ყოველი Π_2^0 სიმრავლისთვის A არსებობს ისეთი $\Sigma_2^0 - \Delta_2^0$ სიმრავლე B, რომ A და B არის Q-არასადარი და ყოველი რ.გ. W სიმრავლისთვის, თუ $W \leq_Q A$ და $W \leq_Q$ B, მაშინ $W \leq_Q \emptyset$.

ლიტერატურა

[1] I.I.Batyrshin, Irreducible, singular, and contiguous degrees, Algebra and Logic, 56 (2017), 181-196.

[2] Yu.L.Ershov, Positive equivalences, Algebra and Logic, 10 (1971), 378-394.

[3] H.Rogers, Theory of recursive functions and effective computability. McGraw-Hill Book Co., New York, 1967.