ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის მათემატიკის დეპარტამენტი

თეა შავაძე

დოქტორანტის სემინარი 1 თემაზე ”კრიტიკულობის აუცილებელი პირობა”

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: თამაზ თადუმაძე

ფიზიკა–მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი

თბილისი 2018

სარჩევი

ა ნ ო ტ ა ც ი ა

ნაშრომში, დამტკიცებულია თეორემა კვაზიამოზნექილ ფილტრზე განსაზღვრული უწყვეტი ასახვის კრიტიკულობის აუცილებელი პირობის შესახებ. ეს თეორემა არის რ. გამყრელიძისა და გ. ხარატიშვილის ექსტრემალური ამოცანების თეორიის ცენტრალური შედეგი. ამ თეორიის მიხედვით, როგორც წესი, ოპტიმალური ამოცანების გამოკვლევა დაიყვანება კრიტიკულობის აუცილებელი პირობის მოძებნაზე. კრიტიკულობის აუცი-ლებელი პირობიდან ოპტიმალური ამოცანისათვის გამომდინარეობს ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები.

Summary

In the work is proved a theorem about of the necessary condition of criticality of the continuous mapping defined on the quasiconvex filter. This theorem is a central result of R. Gamkrelidze and G. Kharatishvili extremal problems theory. By this theory, as rule, investigation of the optimal problems are reduced on the finding necessary condition of criticality. From the necessary condition of criticality follows necessary optimality conditions for the optimal problem.

შესავალი

დოქტორანტის სემინარისთვის განკუთვნილ ნაშრომში გადმოცემულია ყველა ის ძირითადი ცნება და დამხმარე დებულება, რომლებიც საფუძვლად უდევს რ. გამყრელიძისა და გ. ხარატიშვილის მიერ [1]-[2] შრომებში დამუშავებულ ექსტრემალური ამოცანების თეორიას. ამ თეორიის ძირითადი შედეგია კვაზიამოზნექილ ფილტრზე მოცემული ასახვის კრიტიკულობის აუცილებელი პირობა, რომლისგან ოპტიმალური მართვის ამოცანისთვის გამომდინარეობს ოპტიმლურობის ყველა აუცილებელი პირობა.

კვაზიამოზნექილი ფილტრის ცნება შემოღებული იყო რ. გამყრელიძის მიერ. კვაზიამოზნექილი ფილტრი პირველ რიგში არის ფილტრი კლასიკური აზრით და შემდეგ იგი აკმაყოფილებს გარკვეულ დამატებით პირობას, რომელშიც გამოყენებულია სივრცის ტოპოლოგია. აღსანიშნავია, რომ ოპტიმალური მართვის ლოკალური ამოცანა ბუნებრივად უკავშირდება კლასიკურ ფილტრს და ამასთან ერთად თუ იგი აღმოჩნდა კვაზიამოზნექილი, მაშინ სამართლიანია კრიტიკულობის აუცილებელი პირობა.

ნაშრომი, შედგება ხუთი პარაგრაფისგან. 1-4 პარაგრაფში მოყვანილია ძირითადი განმარტებები. ყველა განმარტება, რომელიც დაკავშირებულია ტოპოლოგიურ სივრცესთან აღებულია [3]-დან. საილუსტრაციოდ მოყვანილია მაგალითები ლოკალურად ამოზნექილი ვექტორული ტოპოლოგიური სივრცის, კვაზიამოზნექილი ფილტრის, სასრულოდ ლოკალურად ამოზნექილი სიმრავლის. გარდა ამისა, გამოთვლილია კონრეტული ასახვის დიფერენციალი. მეხუთე პარაგრაფში დამტკიცებულია რ. გამყრელიძისა და გ. ხარატიშვილის თეორემა.

ნაშრომში , არ არის მოცემული აღნიშნული მეთოდის გამოყენება ოპტიმალური ამოცანისთვის. ეს განხოციელებული იქნება დოქტორატის მე-2 სემინარის ფარგლებში.

1. ლოკალურად ამოზნექილი ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე. მაგალითი

1.1. ***ვექტორული სივრცე.*** ვექტორული სივრცე არის ევკლიდეს სამგანზომილებიანი სივრცის ბუნებრივი განზოგადოება. x, y და ა. შ. ელემენტების (ვექტორების , წერტილების) ერთობლიობას ეწოდება ვექტორული სივრცე, რომელსაც აღვნიშნავთ E -თი, თუ მასში განმარტებულია ორი ალგებრული ოპერაცია (ელემენტების ჯამი ; რიცხვისა და ელემენტის ნამრავლი): თუ $x, y \in E$, მაშინ $x + y \in E$; თუ $x \in E, \lambda \in R = (-\infty, \infty)$, მაშინ $\lambda x \in E$. გარდა ამისა, შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1) $x + y = y + x;$

2) $x + (y + z) = (x + y) + z;$

3) $0 + x = x -$ არსებობს ნულოვანი ელემენტი;

4) $x + (-x) = 0 -$ არსებობს მოპირდაპირე ელემენტი, შემდეგში ვისარგებლებთ ასე ჩაწერით $x + (-y) = x - y;$

5) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x);$

6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x;$

7) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y;$

8) $1 \cdot x = x;$

განსაზღვრება 1.1. $A \subset E$ სიმრავლეს ეწოდება ამოზნექილი, თუ ნებისმიერი $x, y \in A$ ელემენტებისათვის ადგილი აქვს $\lambda x + \mu y \in A, \ \forall \lambda, \mu \in R_+ = [0, \infty)$, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $\lambda + \mu = 1$.

განსაზღვრება 1.2. $A \subset E$ სიმრავლეს ეწოდება გაწონასწორებული, თუ ნებისმიერი $x \in A$ წერტილისთვის $\lambda x \in A, \ \forall \lambda \in R, |\lambda| \leq 1.$

განსაზღვრება 1.3. $A \subset E$ სიმრავლეს ეწოდება მშთანთქავი, თუ ნებისმიერი $x \in E$ წერტილისთვის არსებობს $\varepsilon > 0$ ისეთი, რომ $\mu x \in A$ როცა $|\mu| < \varepsilon$.

1.2. ტოპოლოგიური სივრცე. E ვექტორულ სივრცეს ეწოდება ტოპოლოგიური, თუ შემოღებულია E-ს ქვესიმრავლეთა ისეთი სისტემა/ერთობლიობა (სისტემის ყოველ ელემენტს/სიმრავლესუწოდებენ ღია სიმრავლეს), რომლისთვისაც შესრულებულია შემდეგი აქსიომები:

1) ღია სიმრავლეების ნებისმიერი რაოდენობის გაერთიანება ღია სიმრავლეა;

2) ღია სიმრავლეთა სასრული რაოდენობის თანაკვეთა ღია სიმრავლეა;

3) ცარიელი სიმრავლე და E ღია სიმრავლეა.

$U \subset E$ სიმრავლეს ეწოდება $x \in E$ წერტილის მიდამო, თუ არსებობს ისეთი ღია V სიმრავლე, რომ ადგილი აქვს ჩართვას $x \in V \subset U$.

$x \in E$ წერტილს ეწოდება A სიმრავლის შიგა წერტილი, თუ არსებობს x წერტილის ისეთი U მიდამო, რომ $U \subset A$.

A სიმრავლის შიგა წერტილების ერთობლიობა არის ღია სიმრავლე, რომელიც შედის A -ში.

ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება განცალებადი (ჰაუსდორფის) , თუ ორი განსხვავებული წერტილებისათვის არსებობს ისეთი მიდამოები, რომლებიც არ იკვეთებიან.

U_x აღვნიშნოთ, x წერტილის ყველა მიდამოების ერთობლიობა. $B_x \subset U_x$ ეწოდება ბაზისი, თუ ნებისმიერი $U \in U_x$ არსებობს ისეთი $V \in B_x$, რომ $V \subset U$.

1.3. ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე [3]. E ვექტორულ სივრცეს ეწოდება ვექტორული ტოპოლოგიური სივრცე, თუ მასში შემოღებულ ტოპოლოგიაში ასახვები

$$x + y : E \times E \to E,\ \lambda x : R \times E \to E$$

უწყვეტია.

E -ში ლოკალურად ამოზნექილი ვექტორული ტოპოლოგიის შემოღება ხდება ნულის მიდამოების B ბაზისით, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისებები

1) ნებისმიერი $V \in B$ და $U \in B$ არსებობს $W \in B$ ისეთი, რომ $W \subset V \bigcap U$;
2) $V \in B$ და ნებისმიერი $x \in E$ არსებობს $\varepsilon > 0$ ისეთი, რომ $\mu x \in V$ როცა $|\mu| < \varepsilon -$ მშთანთქავი სიმრავლე;
3) $V \in B$, მაშინ ნებისმიერი $x \in V$ და ადგილი აქვს $\lambda x \in V,\ \forall \lambda \in R,\ |\lambda| \le 1 -$ გაწონასწორებული სიმრავლე;
4) $V \in B$, მაშინ $\lambda V \in B,\ \forall \lambda > 0;$
5) $V \in B$ ამოზნექილი სიმრავლეა;
6) $\bigcap\limits_{V \in B} V = \{0\}$.

1.4. ლოკალურად ამოზნექილი ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცის მაგალითი.

E_f აღვნიშნოთ $f: I \times O \to R_x^n$ კარათეოდორის ფუნქციების სიმრავლე, ე.ი თითქმის ყველა ფიქსირებული $t \in I = [a,b]$ ფუნქცია $f(t,x)$ ფუნქცია უწყვეტია O-ზე, ყოველი ფიქსირებული $x \in O$ ფუნქცია $f(t,x)$ ზომადია I-ზე; გარდა ამისა , შესრულებულია პირობები: ყოველი $f \in E_f$ ფუნქციისათვის და $K \subset O$ კომპაქტისათვის არსებობს I-ზე ინტეგრებადი ფუნქციები $m_{f,K}(t) \geq 0$ და $L_{f,K}(t) \geq 0$ (ეს ფუნქციები საზოგადოდ დამოკიდებულია f და K-ზე), ისეთი, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$|f(t,x)| \leq m_{f,K}(t), \forall (t,x) \in I \times K,$$

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq L_{f,K}(t)|x_1 - x_2|, \forall (t,x_1,x_2) \in I \times K \times K.$$

$f_1, f_2 \in E_f$ ფუნქციებს ეწოდება ექვივალენტური, თუ თითქმის ყველა $t \in I$ ადგილი აქვს ტოლობას

$$f_1(t,x) - f_2(t,x) = 0,\ \forall x \in O.$$

ექვივალენტურ ფუნქციებს ჩვენ კვლავ ვუწოდებთ ფუნქციას და აღვნიშნავთ $f(t,x)$. ექვივალენტურ კლასების ერთობლიობა არის ვექტორული სივრცე და მას კვლავ აღვნიშნავთ E_f .

E_f სივრცეში შემოვიღოთ ტოპოლოგია ნულის მიდამოს შემდეგი ბაზისით

$$B = \{V_{K,\delta} : K \subset O, \delta > 0\},$$

სადაც

$$V_{K,\delta} = \left\{ \delta f(t,x) \in E_f : \left| \int_{t_1}^{t_2} \delta f(t,x)dt \right| \leq \delta \right\},$$

$K \subset O$ ნებისმიერი კომპაქტია, ხოლო $\delta > 0$ ნებისმიერი რიცხვია

ადვილია დასამტკიცებელია, რომ ბაზისი აკმაყოფილებს ექვსივე თვისებას:

1) $V_{K_1 \cup K_2,\, \min\{\delta_1,\delta_2\}} \subset V_{K_{K_1},\, \delta_1} \bigcap V_{K_2,\, \delta_2}$;

2) ნებისმიერი $V_{K,\delta} \in B$ მშთანთქავი სიმრავლეა. მართლაც, ნებისმიერი $f \in E_f$ არსებობს ისეთი $\varepsilon > 0$, რომ

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \mu f(t,x)dt \right| \leq \delta, \forall x \in K;\ \forall t_1, t_2 \in I;\ |\mu| < \varepsilon\ ;$$

3) ნებისმიერი $V_{K,\delta} \in B$ გაწონასწორებული სიმრავლეა;

4) ნებისმიერი $V_{K,\delta} \in B$ აკმაყოფილებს პირობას $\lambda V_{K,\delta} \in B,\ \forall \lambda > 0;$

5) $V_{K,\delta} \in B$ ამოზნექილი სიმრავლეა;

6) $\bigcap_{K \subset O,\, \delta > 0} V_{K,\delta} = \{0\}.$

ეს ბაზისი E_f ვექტორულ სივრცეს გადაქცეევს ლოკალურად ამოზნექილ ჰაუსდორფის ვექტორულ ტოპოლოგიურ სივრცედ.

2. კვაზიამოზნექილი ფილტრი. მაგალითი

ვთქვათ, E_z ლოკალურად ამოზნექილი ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცეა.

განსაზღვრება 2.1 [3]. E_z სირცის ქვესიმრავლეთა Ψ სიმრავლეს ექოდება ფილტრი, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

ა) თუ $A, B \in \Psi$, მაშინ $A \bigcap B \in \Psi$;

ბ) თუ $A \in \Psi$ და $B \supset A$, მაშინ $B \in \Psi$;

გ) $\varnothing \notin \Psi$.

წერტილის ყველა მიდამოების სიმრავლე არის ფილტრის მაგალითი.

განსაზღვერება 2.2 [3]. E_z სივრცის ქვესიმრავლეთა B სიმრავლეს ეწოდება ფილტრის ბაზისი, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

ა) თუ $A, D \in B$, მაშინ არსებობს $C \in \Psi$ ისეთი, რომ $C \subset A \bigcap D$;

ბ) $\varnothing \notin \Psi$.

ქვესიმრავლეთა Ψ სიმრავლე არის ფილტრი, თუ მისი ყოველი სიმრავლისათვის არსებობს B ბაზისის ისეთი სიმრავლე, რომელიც შედის მასში.

კვაზიამოზნექილი ფილტრის ცნება შემოღებული იყო რევაზ გამყრელიძის მიერ.

განსაზღვრება 2.3 [1–2]. ვთქვათ Ψ არის ფილტრი E_z სივრცეში. ფილტრს ეწოდება კვაზი–ამოზნექილი, თუ ნებისმიერი $W \in \Psi$ ელემენტისათვის და ნატურალური k რიცხვისათვის არსებობს ელემენტი $W_1 = W_1(W, k) \in \Psi$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $z_i \in W_1, i = \overline{0, k}$ წერტილებისათვის და ნულის $V \subset E_z$ მიდამოსათვის არსებობს ისეთი უწყვეტი ასახვა

$$\phi : co\left(\left\{z_0, ..., z_k\right\}\right) \to W \ ,$$

რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\left(z - \phi(z)\right) \in V \quad \forall z \in co\left(\left\{z_0, ..., z_k\right\}\right).$$

ადვილი მისახვედრია, რომ ჩვენ ყოველთვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ $W_1 \subset W$. რაგდანაც ფილტრის $W_2 \subset W \bigcap W_1$ ელემენტს აქვს W_1 თვისება. შემდეგში ვიგულისხმებთ, რომ $W_1 \subset W$.

ფილტრს ეწოდება ამოზნექილი, თუ მისი ბაზისი შედგება ამოზნექილი სიმრავლეებისგან. ამოზნექილი ფილტრი კვაზიამოზნექილია, აქ ϕ ასახვის როლში გამოდგება იგივური ასახვა.

ვთქვათ $U \subset R^r$ კომპაქტური სიმრავლეა, ხოლო ფუნქცია $f(t,x,u) \in R^n$ უწყვეტია სიმრავლეზე $I \times O \times U$ და უწყვეტად წარმოებადია $x \in O$ მიმართ. Ω აღვნიშნოთ ზომად $u(t) \in U, t \in I$, ფუნქციების სიმრავლე.

ქვემოთ ჩამოვაყალიბებთ გამყრელიძის ლემას, რომელიც არსებით როლს თამაშობს ფილტრის კვაზიამოზნექილობის დამტკიცებაში.

განვიხილოთ სიმრავლე

$$F = \{ f(t,x,u(t)) : u(t) \in \Omega \}.$$

ცხადია F შეიძლება გავაიგივოთ E_f სივრცის ქვესიმრავლესთან.

განვიხილოთ I ინტერვალის σ დანაწილება:

$$\sigma = \left\{ I_\beta = [t_\beta, t_{\beta+1}] : \beta = \overline{1,m} \right\},$$

სადაც

$$a = t_1 < ... < t_{m-1} < t_m = b.$$

ვთქვათ მოცემულია $f_i(t,x) = f(t,x,u_i(t)) \in F, i = \overline{0,k}$ ფუნქციები და σ დანაწილება. ყოველ

$$\lambda \in \Sigma = \left\{ \lambda = (\lambda_0, ..., \lambda_k) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

შევუსაბამოთ I_β დანაწილება $k+1$ რაოდენობა $I_{\beta_i}(\lambda)$ ქვეინტერვალებად შემდეგი წესით

$$mesI_{\beta_i}(\lambda) = \lambda_i I_\beta, i = \overline{0,k}.$$

თუ $\lambda_i = 0$ მაშინ შესაბამისი ინტერვალი გადაგვარდება წერტილად.

შემოვიღოთ ასახვა

$$\phi_\sigma(\lambda) : \Sigma \to F \tag{2.1}$$

შემდეგი ფორმით

$$\phi_\sigma(\lambda) = f_\lambda(t,x) = f(t,x,u_\lambda(t)),$$

სადაც

$$u_\lambda(t) = u_i(t),\ t \in I_{\beta_i}(\lambda), \beta = \overline{1,m}, i = \overline{0,k}.$$

ლემა 2.1. (რ. გამყრელიძე). ნებისმიერი σ დანაწილებისათვის ასახვა (2.1) ეწყვეტია ე.ი. ყოველი ფიქსირებული $\hat{\lambda} \in \Sigma$ წერტილისათვის და ნებისმიერი $V_{K,\varepsilon} \in B$ არსებობს $\delta > 0$, რომ

$$(f_\lambda - f_{\hat{\lambda}}) \in V_{K,\varepsilon}, \forall \lambda \in \left\{ \lambda \in \Sigma : \left| \lambda - \hat{\lambda} \right| < \delta \right\}.$$

გარდა ამისა, ნებისმიერი $V_{K,\varepsilon} \in B$ არსებობს ისეთი σ დანაწილება, რომ

$$\left(\sum_{i=0}^{k} \lambda_i f_i - f_\lambda \right) \in V_{K,\varepsilon} \ \forall \lambda \in \Sigma,$$

ე.ი.

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=0}^{k} \lambda_i f_i(t,x) - f_\lambda(t,x) \right] dt \right| \le \varepsilon \ \ \forall (t_1, t_2, x, \lambda) \in I^2 \times K \times \Sigma.$$

$E_f^{(1)}$ სივრცე არის ეკვივალენტური f კლასების ერთობლიობა, რომლებისც აკმაყოფილებენ პირობებს: $f : I \times O \to R_x^n$ არის კარათეოდორის ფუნქცია; თითქმის ყველა $t \in I$ ფუნქცია f უწყვეტად წარმოებადია $x \in O$ მიმართ; ყოველი $x \in O$ ფუნქცია $f_x(t,x)$ ზომადია I -ზე; ყოველი $f \in E_f^{(1)}$ ფუნქციისათვის და $K \subset O$ კომპაქტისათვის არსებობს I -ზე ინტეგრებადი ფუნქცია $m_{f,K}(t) \ge 0$ ისეთი რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left| f(t,x) \right| + \left| f_x(t,x) \right| \le m_{f,K}(t), \forall (t,x) \in I \times K.$$

ცხადია, რომ

$$E_f^{(1)} \subset E_f, \ F \subset E_f^{(1)}.$$

$B_1 = \left\{ V_{K,\delta}^{(1)} = V_{K,\delta} \bigcap E_f^{(1)} : K \subset O, \delta > 0 \right\}$ ბაზისი განსაზღვრავს ტოპოლოგიას $E_f^{(1)}$ - ში. $E_f^{(1)}$ - ში შემოვიღოთ ფილტრი შემდეგი ბაზისით: $\Phi = \left\{ W_{K,\delta} \right\}$, სადაც

$$W_{K,\delta} = \left\{ \delta f \in E_f^{(1)} : \int_I \sup \left\{ \left| \delta f(t,x) \right| + \left| \delta f_x(t,x) \right| : x \in K \right\} dt \le \delta \right\}.$$

ეს ფილტრი ამოზნექილია ე.ი. კვაზიამოზნექილია. ახლა განვიხილოთ ფილტრი Ψ_{f_0}, რომლის ბაზისია $\Phi_{f_0} = \left\{ W_{K,\delta}^{(1)}(f_0) = W_{K,\delta}(f_0) \bigcap F \right\}$,
სადაც $f_0 = f(t,x,u_0(t)), W_{K,\delta}(f_0) = f_0 + W_{K,\delta}$.

ლემა 2.2. ფილტრი Ψ_{f_0} კვაზიამოზნექილია.

დამტკიცება. ვთქვათ $W \in \Psi_{f_0}$ ნებისმიერი ელემენტია. არსებობს ისეთი $W_{K_1,\delta_1}^{(1)}(f_0) \subset W$. ვაჩვენთ, რომ $W_1 \in \Psi_{f_0}$ როლში შეიძლება ავიღოთ $W_{\delta_1/(k+1)}^{(1)}(f_0)$. ნებისმიერი

$f_i \in W^{(1)}_{\delta_1/(k+1)}(f_0), i=\overline{1,k+1}$ და $V^{(1)}_{K,\varepsilon} \in B_1$ ავაგოთ ზემოაღნიშნული წესით ასახვა $\phi(f),\ f \in co\left(\{f_1,...,f_{k+1}\}\right)$: $\phi(f) = f_\lambda \in F$, სადაც λ არის f - ის შესაბამისი $f = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f_i$ წარმოდგენაში. გამყრელიძის ლემის თანახმად ასახვა უწყვეტია და

$$\left(\sum_{i=}^{k+1} \lambda_i f_i - f_\lambda\right) \in V^{(1)}_{K,\varepsilon}\ \forall \lambda \in \Sigma. \quad \big(f - \phi(f)\big) \in V^{(1)}_{K,\varepsilon}\ \forall f \in co(\{f_0,...,f_k\}).$$

ლემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$f_\lambda \in W^{(1)}_{K_1,\delta_1}(f_0). \tag{2.2}$$

მართლაც,

$$\int_I \sup\left\{|f_0(t,x) - f_\lambda(t,x)| + |f_{0x}(t,x) - f_{\lambda x}(t,x)| : x \in K_1\right\} dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1}\sum_{\beta=1}^{p} \int_{I_{\beta_i}(\lambda)} \sup\left\{|f_0(t,x) - f_i(t,x)| + |f_{0x}(t,x) - f_{ix}(t,x)| : x \in K_1\right\} dt$$

$$\le \int_I \sup\left\{|f_0(t,x) - f_\lambda(t,x)| + |f_{0x}(t,x) - f_{\lambda x}(t,x)| : x \in K\right\} dt \le (1+k)\frac{\delta_1}{1+k} = \delta_1 .$$

(2.2) დამტკიცებულია.

3. სასრულოდ ლოკალურად ამოზნექილი სიმრავლე. მაგალითი

ვთქვათ $z_i \in E_z$, $i=\overline{1,k}$, სიმრავლეს

$$L=\left\{z=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i z_i : \lambda_i \in R,\ i=\overline{1,k}\right\}$$

ეწოდება სასრულ განზომილებიანი წრფივი მრავალსახეობა წარმოშობილი $z_i \in E_z$, $i=\overline{1,k}$ წერტილებისგან.

თუ $z_0 \in L$ მაშინ ჩვენ ვიტყვით, რომ მრავალსახეობა L გადის z_0 წერტილზე და მას აღვნიშნავთ L_{z_0} და ასე ჩავწერთ

$$L_{z_0}=\left\{z=z_0+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i z_i : \lambda_i \in R,\ i=\overline{1,k}\right\}.$$

ვთქვათ $X \subset E_z^k$ არის ლოკალურად ამოზნექილი ქვესივრცე, ე.ი. , $x \in X$ წერტილის ნებისმიერი $V_x \subset X$ მიდამოსთვის არსებობს ამოზნექილი $\hat{V}_x \subset X$ მიდამო, რომელიც შედის V_x -ში.

განსაზღვრება 3.1. ვიტყვით, რომ წერტილები $z_i \in E_z^k, i=\overline{0,k}$ არიან ზოგად მდგომარეობაში, თუ ვექტორები არიან წრფივად დამოუკიდებელი.

განსაზღვრება 3.2. ვთქვათ, წერტილები

$$z_i, i=\overline{0,k}$$

არიან ზოგად მდგომარეობაში. ამ წერტილების ამოზნექილი გარსს, ე.ი.

$$co(\{z_0,\ldots,z_k\})=\{\sum_{i=0}^{k}\lambda_i z_i : 0\le\lambda_i\le 1, \sum_{i==0}^{k}\lambda_i=1\}$$

ეწოდება k-განზომილებიანი სიმპლექსი.

ცხადია,

$$co(\{z_0,\ldots,z_k\}) \subset L=\{\sum_{i=0}^{k}\lambda_i z_i : \lambda_i \in R, i=\overline{0,k}\}$$

განსაზღვრება 3. 3. ვთქვათ $E_z = R^m \times E_\zeta$ ვექტორული სივრცეა, ხოლო $X \subset R^m$ ლოკალურად ამოზნექილი ტოპოლოგიური სივრცეა. $D \subset X \times E_\varsigma$ სიმრავლეს ეწოდება სასრულოდ ლოკალურად ამოზნექილი, თუ ნებისმიერი $z = (x, \varsigma) \in D$ წერტილისთვის და ნებისმიერი $L_\varsigma \subset E_\zeta$ სასრულ განზომილებიანი წრფივი მრავალსახეობისთვის არსებობს ამოზნექილი მიდამოები $V_x \subset X$ და $V_\varsigma \subset L_\varsigma$ ისეთი, რომ

$$V_x \times V_\varsigma \subset D.$$

შევნიშნავთ, რომ სასრულოდ ლოკალურად ამოზნექილი სიმრავლის განსაზღვრისთვის არ არის საჭირო ტოპოლოგიის შემოღება E_ς-ში. იგი იყენებს სასრულ განზომილებიანი სივრცეების ტოპოლოგიას. ამიტომ ეწოდება მას სასრულოდ ლოკალურად ამოზნექილი სიმრავლე.

მაგალითი 3.1. ვთქვათ $X = [a,b) \times (a,b] \times M \subset I \times I \times O \subset R^{2+n}$, სადაც M ამოზნექილი სიმრავლეა. D–თი აღვნიშნოთ ისეთი $z = (t_0, t_1, x_0, f) \in X \times E_f^{(1)}$ წერტილების სიმრავლე, რომლის შესაბამის კოშის ამოცანას

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x),\ t \in [t_0, t_1], \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

გააჩნდეს ამონახსნი $x(t;z)$, რომელიც განსაზღვრულია $[t_0, t_1]$–ზე. დავამტკიცოთ, რომ სიმრავლე D სასრულოდ ლოკალურად ამოზნექილია. მართლაც, ვთქვათ $\widehat{z} = (\widehat{t}_0, \widehat{t}_1, \widehat{x}_0, \widehat{f}) \in D$ ნებისმიერი ფიქსირებული წერტილია, ხოლო

$L_{\widehat{f}} = \left\{ f = \widehat{f} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i : \lambda_i \in R,\ i = \overline{1,k} \right\} \subset E_f^{(1)}$ არის $\widehat{f}$ წერტილზე გამავალი ნებისმიერი ფიქსირებული წრფივი მრავალსახეობა. კოშის ამოცანის კორექტულობის თეორემის ძალით, არსებობს ისეთი $\delta > 0$ რომ ნებისმიერი $z = (t_0, t_1, x_0, f) \in V_{\widehat{t}_0} \times V_{\widehat{t}_1} \times V_{\widehat{x}_0} \times V_{\widehat{f}}$ წერტილს შეესაბამება ამონახსი განმარტებული $[t_0, t_1]$–ზე, აქ

$$V_{\widehat{t}_0} = (\widehat{t}_0 - \delta, \widehat{t}_0 + \delta) \bigcap [a,b),\quad V_{\widehat{t}_1} = (\widehat{t}_1 - \delta, \widehat{t}_1 + \delta) \bigcap (a,b],\ V_{\widehat{x}_0} = \left\{ x \in R^n : \left| x - \widehat{x}_0 \right| < \delta \right\} \bigcap M,$$

$$V_{\widehat{f}} = \left\{ \widehat{f} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i : \lambda_i \in R, \left| \lambda_i \right| < \delta, i = \overline{1,k} \right\} \subset L_{\widehat{f}}..$$

ცხადია, რომ $V_{\widehat{t}_0} \times V_{\widehat{t}_1} \times V_{\widehat{x}_0} \subset X$ და $V_{\widehat{f}} \subset L_{\widehat{f}}$ ამოზნექილი მიდამოებია. D სიმრავლის სასრულოდ ლოკალურად ამოზნექილობა დამტკიცებულია.

4. ასახვა და მისი დიფერენციალის გამოთვლა

ვთქვათ $E_z = R^k \times E_\zeta$ არის $z = (x, \zeta)$ წერტილების ვექტორული სივრცე, $X \subset R^k$ - ლოკალურად ამოზნექილი ტოპოლოგიური ქვესივრცე ,ხოლო $D \subset X \times E_\zeta$ -სასრულოდ ლოკალურად ამოზნექილი სიმრავლეა.

განვიხილოთ ასახვა

$$P : D \to R^l. \tag{4.1}$$

განსაზღვრება 4.1. (4.1) ასახვას ეწოდება დიფერენცირებადი $z_0 = (x_0, \varsigma_0) \in D$

წერტილში, თუ არსებობს წრფივი ასახვა

$$dP_{z_0} : E_{\delta z} = E_z - z_0 \to E^m_{\delta p}, \tag{4.2}$$

სადაც $E_{\delta z} = E_z - z_0 = \{\delta z = z - z_0 : z \in E_z\}$, თუ ნებისმიერი $L_{\varsigma_0} \subset E_\tau$ მრავალსახეობის-

თვის ადგილი აქვს ტოლობა

$$P(z_0 + \varepsilon \delta z) - P(z_0) = \varepsilon dP_{z_0}(\delta z) + o(\varepsilon \delta z),\ \forall\ (\varepsilon, \delta z) \in (0, \varepsilon_0) \times V_0 \times V,$$

სადაც $V_0 \subset X - x_0$ და $V \subset L_{\varsigma_0} - \varsigma_0$ არის ნულის შემოსაზღვრული ამოზნექილი მიდამოები; $\varepsilon_0 > 0$ არის რიცხვი , რომლისთვის შესრულებულია პირობა

$$z_0 + \varepsilon \delta z \in D \quad , \forall\ (\varepsilon, \delta z) \in (0, \varepsilon_0) \times V_0 \times V;$$

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{o(\varepsilon \delta z)}{\varepsilon} = 0$ თანაბრად $\delta z \in V_0 \times V$ მიმართ.

დიფერენციალის გამოთვლა. ყოველ $v = (t_0, t_1, x_0, f) \in (a,b) \times (a,b) \times O \times E^{(1)}_f$ ელემენტს შევუსაბამოთ კოშის ამოცანა

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x),\ t \in [t_0, t_1], \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ვთქვათ $z_0 = (t_{00}, t_{10}, x_{00}, f_0) \in (a,b) \times (a,b) \times O \times E^{(1)}_f$, სადაც $y_0 = (t_{00}, t_{10}, x_{00})$, ელემენტს შეესაბამება ამონახსნი $x_0(t) = x(t; z_0), t \in [t_{00}, t_{10}]$.

განვიხილოთ სივრცე

$$E_z = R^{2+n} \times E^{(1)}_f$$

წერტილებით $z = (y, f)$, სადაც $y = (t_0, t_1, x_0)$.

სიმრავლე

$X=(a,t_{00}]\times(t_{00},t_{10}]\times O\subset R^{2+n}$ არის ლოკალურად ამოზნექილი ქვესივრცე R^{2+n} სივრციდან ინდუცირებულ ტოპოლოგიაში.

$D\subset E_z$ აღვნიშნოთ ისეთი $z=(y,f)\in E_z$ წერტილების სიმრავლე, რომლისთვისაც არსებობს $x(t;z),\, t\in[t_0,t_1]$ ამონახსნი. D არაცარიელია, რადგან $z_0\in D.$ სიმრავლე D სასრულოდ ლოკალურად ამოზნექილია.

D სიმრავლეზე განვსაზღვროთ ასახვა

$$P:D\to R^n \tag{4.3}$$

ფორმულით

$$P(z)=x(t_1;z).$$

ლემა 4.1. *ვთქვათ არსებობს ზღვრები* $\lim\limits_{(t,x)\to(t_{00},x_{00})} f_0(t,x)=f_0^-,\ (t,x)\in(a,t_{00}]\times O$, $\lim\limits_{(t,x)\to(t_{10},x_{10})} f_0(t,x)=f_1^-,\ (t,x)\in(t_{00},t_{10}]\times O$, *სადაც* $x_{10}=x(t_{10};z_0)$. *მაშინ (4.3) ასახვა დიფერენცირებადია* z_0 *წერტილში და*

$$dP_{z_0}(\delta z)=\Phi(t_{10})(\delta x_0-f_0^-\delta t_0+\int_{t_{00}}^{t_1}\Phi^{-1}(t)\delta f(t,x_0(s))ds)+f_1^-\delta t_1\,,\delta z\in E_{\delta z}=E_z-z_0,$$

სადაც $\Phi(t)$ *არის*

$$\dot\Phi=f_{0x}(t,x_0(t))\Phi,\quad \Phi(t_0)=H$$

განტოლების ამონახსნი, H ერთეულოვანი მატრიცაა.

დამტკიცება. არსებობს ამოზნექილი და შემოსაზღვრული მიდამოები

$$V_{t_{00}}\times V_{t_{10}}\times V_{x_{00}}\subset X \text{ და } V_{f_0}\subset L_{f_0}\quad (\text{იხ. წინა პარაგრაფი})$$

ისეთი, რომ ნებისმიერი $z=(t_0,t_1,x_0,f)\in V_{\hat t_0}\times V_{\hat t_1}\times V_{\hat x_0}\times V_{\hat f}$ ელემენტს შეესაბამება ამონა- ხსნი $x(t;z)$ განმარტებული $[t_0,t_1]$. აქედან გამომდინარე, არსებობს $\varepsilon_0>0$ და ამოზნექილი მიდამოები $V_0=V_{t_{00}}\times V_{t_{10}}\times V_{x_0}-y_0\subset X-y_0$ და $V=V_{f_0}\subset L_{f_0}-f_0$, რომ $z_0+\varepsilon\delta z\in D\ \ \forall\delta z\in V_0\times V.$ ახლა გამოვთვალოთ სხვაობა

$$P(z_0+\varepsilon\delta z)-P(z_0)=x(t_{10}+\varepsilon\delta t_1;z_0+\varepsilon\delta z)-x_0(t_{10})=\Delta x(t_{10}+\varepsilon\delta t_1;\varepsilon\delta z)+x(t_{10}+\varepsilon\delta t_1)-x_0(t_{10})$$

სადაც

$$\Delta x(t_{10}+\varepsilon\delta t_1;\varepsilon\delta z)=x(t_{10}+\varepsilon\delta t_1;z_0+\varepsilon\delta z)-x_0(t_{10}+\varepsilon\delta t_1).$$

ამონახსნის ვარიაციის ფორმულის გამოყენებით გვექნება

$$\Delta x(t_{10}+\varepsilon\delta t_1;\varepsilon\delta z)=\varepsilon\delta x(t_{10}+\varepsilon\delta t_1;\delta z)+o(\varepsilon\delta z),$$

სადაც

$$\delta x(t;\delta z)=\Phi(t)(\delta x_0-f_0^-\delta t_0+\int_{t_{00}}^{t}\Phi^{-1}(s)\delta f(s,x_0(s))ds).$$

ცხადია, რომ

$$\delta x(t_{10}+\varepsilon\delta t_1;\varepsilon\delta z)=\varepsilon\delta x(t_{10};\delta z)+o(\varepsilon\delta z).$$

შემდეგ,

$$x(t_{10}+\varepsilon\delta t_1)-x_0(t_{10})=\int_{t_{00}}^{t_{00}+\varepsilon\delta t_1}f_0(t,x_0(t))dt=\varepsilon f_1^-\delta t_1+o(\varepsilon\delta z).$$

ზემოთ მიღებული გამოსახულებების გათვალისწინებით გვექნება

$$P(z_0+\varepsilon\delta z)-P(z_0)=\varepsilon[\delta x(t_{10};\delta z)+f_1^-\delta t_1]+o(\varepsilon\delta z).$$

ამრიგად,

$$dP_{z_0}(\delta z)=\delta x(t_{10};\delta z)+f_1^-\delta t_1,$$

რომელიც არის წრფივი ასახვა

$$dP_{z_0}:E_{\delta z}\to R^n.$$

ლემა 4.1 დამტკიცებულია.

5. კრიტიკულობის აუცილებელი პირობა

5.1. ძირითადი თეორემების ფორმულირება.

ვთქვათ E_z არის ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე და $X \subset E_x^k$ ლოკალურად ამოზნექილი ტოპოლოგიური სივრცე, ამასთან, ვთქვათ $D \subset X \times E_\varsigma$ სასრულოდ ლოკალურად ამოზნექილი სიმრავლეა და ვთქვათ მოცემულია ასახვა

$$P : D \to E_P^m \tag{5.1}$$

და Ψ არის ფილტრი E_z -ში.

$co[\Psi]$ აღვნიშნოთ ამოზნექილი ფილტრი, რომლის ელემენტები არიან $co(W)$ სიმრავლეები, სადაც W არის Ψ ფილტრის ნებისმიერი ელემენტი.

ქვემოთ მოყვანილი თეორემა არის ანალოგი გამყრელიძე-ხარატიშვილის თეორემის, რომლებიც ეხება კრიტიკულობის აუცილებელი პირობა ასახვების განსასაზღვრად სასრულოდ ლოკალურად ამოზნექილ სიმრავლეზე.

თეორემა 5.1 [1–2]. *ვთქვათ,* (5.6) *ასახვა უწყვეტია* $co[\Psi]$ *-ზე და კრიტიკულია* Ψ *- ზე. ამასთან, ვთქვათ,* Ψ *იყოს კვაზიამოზნექილი. მაშინ ნებისმიერი* $z_0 = (x_0, \varsigma_0)$ *წერტილისთვის, რომელიც მიეკუთვნება* Ψ *ფილტრის ყველა სიმრავლეს, რომელშიდაც* ასახვას *აქვს* (4.2) *დიფერენციალი და არსებობს ელემენტი* $\hat{W} \in \Psi$ *ისეთი, რომ* E_{dp}^m *სივრცის ნული არის შემოსაზღვრული წერტილი შემდეგი სიმრავლისა*

$$dP_{z_0}(co(\hat{W}) - z_0) \subset E_{dp}^m \tag{5.2}$$

თეორემა 5.2. [1–2]. *ვთქვათ, შესრულებულია თეორემა 5.1–ის პირობები. მაშინ ნებისმიერი* z_0 *წერტილისათვის, რომელიც ეკუთვნის* Ψ *ფილტრის ყველა სიმრავლეს და რომელზედაც არსებობს დიფერენციალი (4.2) , არსებობს ისეთი ელემენტი* $\hat{W} \in \Psi$ *და ვექტორი* $\pi = (\pi_1, ..., \pi_m) \neq 0$ *ისეთი, რომ*

$$\pi dP_{z_0}(\delta z) = \sum_{i=1}^{m} \pi_i dP_{z_0}^i(\delta z) \leq 0, \forall \delta z \in cone(co(\hat{W}) - z_0), \tag{5.3}$$

სადაც $co(\hat{W})$ წარმოქმნილია $\hat{W}$ სიმრავლით.

5.2. დამხმარე დებულებები.

ლემა 5.1. *ნებისმიერი $z_i \in E_z, i=\overline{0,k},$ ვექტორთა სისტემისათვის*

$$z_0 - z_i, \dots, z_{i-1} - z_{i,} z_{i+1} - z_i, \dots, z_k - z_i \tag{5.4}$$

წრფივად დამოუკიდებელი.

დამტკიცება. გავამრავლოთ (5.1) $\alpha_i, i=\overline{0,k}$ -ზე შემდეგნაირად:

$$\alpha_0(z_0 - z_i) + \alpha_1(z_1 - z_i) + \dots \alpha_{i-1}(z_{i-1} - z_{i,}) + \alpha_{i+1}(z_{i+1} - z_i) + \dots + \alpha_k(z_k - z_i) = 0$$

საიდანაც შესაკრებებში z_0 -ის დამატებით და გამოკლებით მივიღებთ

$$\alpha_1(z_1 - z_0) + \alpha_1(z_0 - z_i) + \dots + \alpha_{i-1}(z_{i-1} - z_{0,}) + \alpha_{i-1}(z_0 - z_i) + \alpha_0(z_0 - z_i) +$$

$$\alpha_{i+1}(z_{i+1} - z_{0,}) + \alpha_{i+1}(z_0 - z_i) + \dots + \alpha_k(z_k - z_0) + \alpha_k(z_0 - z_i) = 0$$

აქედან გვექნება

$$\alpha_1(z_1 - z_0) + \dots + \alpha_{i-1}(z_{i-1} - z_{0,}) - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1} + \alpha_0 + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_k)(z_i - z_0) +$$

$$\alpha_{i+1}(z_{i+1} - z_{0,}) + \dots + \alpha_k(z_k - z_0) = 0$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_{i-1} = 0; \alpha_{i+1} = 0; \Rightarrow \alpha_k = 0; \qquad \alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1} + \alpha_0 + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_k = 0.$$

$$\alpha_0 = 0.$$

ე.ი.

ამდენად ვექტორთა (5.4) სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

ლემა 5.2. *სიმპლექსი*

$$co(\{z_0, \dots, z_k\}) \tag{5.5}$$

შეიცავს არაცარიელ შიგა წერტილს.

ლემა 5.3. (5.2) *სიმპლექსის ყოველი* z *წერტილი შეიძლება წარმოდგინდეს ცალსახად შემდეგი ფორმით*

$$z=\sum_{i=0}^{k}\lambda_i z_i,\ \text{სადაც}\ \lambda_i\geq 0, i=\overline{0,k}\ \text{და}\ \sum_{i=0}^{k}\lambda_i=1. \tag{5.6}$$

ლემა 5.4. *ვთქვათ,* $M\subset E_z^k$ *და ამასთან, ვთქვათ,* $0\in \operatorname{int} M$ *; მაშინ* E_z^k *-ში არსებობს* k *განზომილებიანი სიმპლექსი, რომელიც შედის* M *-ში და შეიცავს* $0\in E_z^k$ *როგორც შიგა წერტილს.*

ლემა 5.5. *ვთქვათ, მოცემულია წრფივი ასახვა*

$$g:E_z\rightarrow E_g^k \tag{5.7}$$

და k *განზომილებიანი სიმპლექსი* $co(\{g_0,...,g_k\})\subset E_g^k$. *ვთქვათ,* $z_i, i=\overline{0,k}$ *არიან გარკვეული წინა სახეები* $g_i, i=\overline{0,k}$ *წერტილებისა,* (5.7) *ასახვის შესაბამისად. მაშინ* $co(\{z_0,...,z_k\})\subset E_z$ *არის* k *განზომილებიანი სიმპლექსი და ასახვის შეზღუდვა*

$$g:co(\{z_0,...,z_k\})\rightarrow co(\{g_0,...,g_k\}) \tag{5.8}$$

არის ჰომეომორფიზმი.

ლემა 5.6. ვთქვათ, მოცემულია $W\subset E_z$ და ასახვა

$$g:W\rightarrow E_p^k \tag{5.9}$$

უწყვეტია E_z -დან ინდუცირებულ ტოპოლოგიაში. ამასთან, ვთქვათ, $K\subset W$ არის კომპაქტ სიმრავლე. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის, არსებობს $V_\varepsilon\subset E_z$ ნულის ისეთი მიდამო, რომ

$$\left|p(z')-p(z'')\right|\leq\varepsilon,\qquad \forall(z',z'')\in K\times W,\qquad '-z''\in V_\varepsilon. \tag{5.10}$$

თეორემა 5.3. *(კარათეოდორი) ვთქვათ,* $M\subset E_z^k$ *. მაშინ ნებისმიერი წერტილი* $z\in co(M)$ *შეიძლება წარმოდგინდეს შემდეგი ფორმით*

$$z=\sum_{i=0}^{k}\lambda_i z_i,$$

სადაც $z_i\in M, \lambda_i\geq 0, i=\overline{0,k}$ *და* $\sum_{i=0}^{k}\lambda_i=1.$

თეორემა 5.4. *(ბრაუერი) ვთქვათ,* $co(\{g_0,...,g_k\}) \subset E_z$ *არის* k *განზომილებიანი სიმპლექსი. მაშინ ნებისმიერ უწყვეტი ასახვას*

$$g : co(\{z_0,...,z_k\}) \to co(\{g_0,...,g_k\})$$

აქვს უძრავი (ფიქსირებული) წერტილი, ე.ი. არსებობს წერტილი $z \in co(\{z_0,...,z_k\})$ *ისეთი, რომ* $g(z) = z$.

თეორემა 5.5. *ვთქვათ,* $M \subset E_z^k$ *არის ამოზნექილი სიმრავლე, ვთქვათ* $0 \in \partial M$. *მაშინ არსებობს არაცარიელი* k *განზომილებიანი ვექტორი* $\pi = (\pi_1,...,\pi_k)$ *ისეთი, რომ*

$$\pi z = \sum_{i=1}^{k} \pi_i z^k \le 0, \forall z \in M.$$

ვთქვათ $X \subset E_z^k$ იყოს ლოკალურად ამოზნექილი ტოპოლოგიური ქვესივრცე, ე.ი. $x \in X$ წერტილის ნებისმიერი $V_x \subset X$ მიდამოსთვის, არსებობს ამოზნექილი $\hat{V}_x \subset X$ მიდამო, რომელიც შედის V_x-ში. მარტივად მტკიცდება შემდეგი ლემა.

ლემა 5.7. *ვთქვათ,* $\hat{x} \in X$ *იყოს ფიქსირებული წერტილი. ამასთან,* $V_0 \subset X - \hat{x}$ *იყოს ამოზნექილი ნულის მიდამო, და ვთქვათ* $V_1 \subset X - \hat{x}$ *იყსო გარკვეული ნულის მიდამო. მაშინ არსებობს* $\varepsilon_0 > 0$ *ისეთი რიცხვი, რომ*

$$\varepsilon V_0 \subset V_1, \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

ლემა 5.8. *ვთქვათ,* D *იყოს სასრულოდ ლოკალურად ამოზნექილი სიმრავლე, და ვთქვათ* $z_0 = (x_0, \varsigma_0) \in D$. *ამასთან, ვთქვათ* $V_0 \subset X - \hat{x}$ *და* $V \subset L_{\varsigma_0} - \varsigma_0$ *იყოს ამოზნექილი შემოსაზრვრული ნულის მიდამო. მაშინ არსებობს* $\varepsilon_0 > 0$ *ისეთი რიცხვი, რომ*

$$z_0 + \varepsilon \delta z \in D, \forall (\varepsilon, \delta z) \in (0, \varepsilon_0) \times V_0 \times V, dz = (\delta x, \delta \varsigma).$$

5.3. თეორემა 5.1 დამტკიცება

დამტკიცება. დაშვებით, არსებობს ელემენტი $W_i \in \Psi, i = 1,2$ ისეთი, რომ $co(W_1) \subset D$, $W_2 \subset D$, და ამასთან, ასახვა

$$P : co(W_1) \to E_p^m \tag{5.11}$$

უწყვეტია და $P(z_0) \in \partial P(W_2)$. ცხადია,

$$W_3 = W_1 \cap W_2 \in \Psi \text{ და } P(z_0) \in \partial P(W_3).$$

ვთქვათ თეორემის პირობები სრულდება, მაგრამ ნებისმიერი $W \in \Psi$ შედის D-ში, $0 \in E_{dp}^m$ არის შიგა წერტილი სიმრავლისა

$$dP_{z_0}(co(W) - z_0) \subset E_{dp}^m.$$

ვაჩვენოთ, რომ ეს ეწინააღმდეგება W_3 ელემენტის შერჩევას. მართლაც, დავამტკიცოთ შემდეგი განტოლების ამოხსნადობა z-ის მიმართ

$$P(z) = P(z_0) + p, z \in W_3, \tag{5.12}$$

ნებისმიერი $p \in E_p^m$ ვექტორისთვის, რომლის მოდული არის საკმარისად მცირე და აქედან ჩვენ ვამტკიცებთ, რომ $P(z_0)$ არის შიგა წერტილი $P(W_3) \subset E_p^m$ სიმრავლისა, რაც ეწინააღმდეგება W_3 ელემენტის შერჩევას. აღვნიშნოთ $W_4 = W_4(W_3;(m+1)^2) \subset W_3$-ით Ψ კვაზიამოზნექილი ფილტრის ელემენტი (იხ. განსაზღვრება 2.3), რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას: ნებისმიერი $V \subset E_z$ ნულის მიდამოსთვის და ნებისმიერი $1+(m+1)^2$ წერტილებისთვის $z_0,...,z_{(m+1)^2}$ W_4-დან, არსებობს უწყვეტი ასახვა

$$\phi : co(\{z_0,...,z_{(m+1)^2}\}) \to W_3, \tag{5.13}$$

რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$(z - \phi(z)) \in V, \quad \forall z \in co(\{z_0,...,z_{(m+1)^2}\}). \tag{5.14}$$

დაშვების თანახმად, $0 \in E_{dp}^m$ არის შიგა წერტილი ამოზნექილი სიმრავლისა

$$dP_{z_0}(co(W_4) - z_0) \subset E_{dp}^m. \tag{5.15}$$

აქედან გამომდინარე არსებობს $m+1$ რაოდენობა წერტილები $dp_i \in dP_{z_0}(co(W_4) - z_0)$, რომლებიც არიან ზოგად მდგომარეობაში და ამასთან, $m-$ განზომილებიანი

$co(\{dp_0,...,dp_m\})$ შეიცავს $0 \in E^m_{dp}$ როგორც შიგა წერტილს (იხ. ლემა 5.4). (4.2) წრფივი ასახვით

$$dP_{z_0}(co(W_4) - z_0) = co(dP_{z_0}(W_4 - z_0)). \tag{5.16}$$

ყოველი წერტილი $dp_i \in co(dP_{z_0}(W_4 - z_0)), i = \overline{0,m},$ წარმოდგება ფორმით

$$dp_i = \sum_{j=0}^{m} \mu_{ij} dp_{ij}, dp_{ij} \in dP_{z_0}(W_4 - z_0), \quad \mu_{ij} \geq 0, \ \sum_{j=0}^{m} \mu_{ij} = 1$$

(იხ. თეორემა 5.3). ვთქვათ $\delta z_{ij} \in W_4 - z_0$ არიან გარკვეული წინასახეები dp_{ij} წერტილებისა განსაზღვრული ასახვით

$$dP_{z_0} : W_4 - z_0 \to E^m_{dp},$$

და ვთქვათ

$$\delta z_i = \sum_{j=0}^{m} \mu_{ij} \delta z_{ij}, \quad i = \overline{0,m}. \tag{5.17}$$

ცხადია,

$$dP_{z_0}(\delta z_i) = dp_i, \quad i = \overline{0,m}.$$

ლემა 5.5–ის თანახმად, წერტილები $\delta z_i = (\delta x_i, \delta \varsigma_i), i = \overline{0,m}$ არიან ზოგად მდგომარეობაში და ასახვა

$$dP_{z_0} : co(\{\delta z_0,...,\delta z_m\}) \to co(\{dp_0,...,dp_m\}) \tag{5.18}$$

არის ჰომეომორფიზმი.

ვთქვათ $z \in co(\{z_0, z_0 + \delta z_0,..., z_0 + \delta z_m\})$. მაშინ

$$z = z_0 + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \delta z_i = z_0 + \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{k} \lambda_i \mu_{ij} \delta z_{ij}$$

$$= (1 - \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} \lambda_i \mu_{ij}) z_0 + \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} \lambda_i \mu_{ij} (z_0 + \delta z_{ij}), \quad \lambda_i \geq 0, \ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \leq 1$$

(იხ. (5.17)).

აქედან გამომდინარე

$$co(\{z_0, z_0+\delta z_0, ..., z_0+\delta z_m\}) \subset co(\{z_0, z_0+\delta z_{00}, ..., z_0+\delta z_{ij}, ..., z_0+\delta z_{mm}\}). \quad (5.19)$$

ამასთან, ვაჩვენოთ, რომ თუ $\varepsilon \in [0,1]$, ადგილი აქვს შემდეგ ჩართვას

$$z_0 + \varepsilon co(\{\delta z_0, ..., \delta z_m\}) \subset co(\{z_0, z_0+\delta z_0, ..., z_0+\delta z_m\}). \quad (5.20)$$

მართლაც, ცხადია ყოველი წერტილი $z_0 + \varepsilon co(\{\delta z_0, ..., \delta z_m\})$ წარმოიდგინება ფორმით

$$z = z_0 + \varepsilon \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \delta z_i = (1-\varepsilon) z_0 + \varepsilon \sum_{i=0}^{m} \lambda_i (z_0 + \delta z_i) \in co(\{z_0, z_0+\delta z_0, ..., z_0+\delta z_m\}).$$

(5.19) და (5.20) ჩართვებიდან გამომდინარეობს

$$\begin{aligned} z_0 + \varepsilon co(\{\delta z_0, ..., \delta z_m\}) &\subset co(\{z_0, z_0+\delta z_0, ..., z_0+\delta z_m\}) \\ &\subseteq co(W_4) \subset co(W_3) \subset D, \forall \varepsilon \in [0,1] \end{aligned} \quad (5.21)$$

თუ გავითვალისწინებთ

$$D - z_0 \subset (X - x_0) \times (E_\varsigma - \varsigma_0),$$

უკანასკნელ ჩართვას პირდაპირ მივიღებთ

$$\varepsilon co(\{\delta x_0, ..., \delta x_m\}) \subset (X - x_0), \forall \varepsilon \in [0,1] \quad (5.22)$$

ვთქვათ, $L_{\varsigma_0} \subset E_\varsigma$ იყოს ისეთი მრავალსახეობა, რომელიც წარმოქმნილია $\varsigma_0, \delta\varsigma_0, ..., \delta\varsigma_m$ წერტილებით:

$$L_{\varsigma_0} = \{\varsigma_0 + \sum_{i=0}^{m+1} \lambda_i \delta\varsigma_i : \lambda_i \in R, i = \overline{0, m+1}\}, \delta\varsigma_{m+1} = \varsigma_0.$$

ცხადია,

$$\varepsilon co(\{\delta\varsigma_0, ..., \delta\varsigma_m\}) \subset L_{\varsigma_0} - \varsigma_0. \quad (5.23)$$

ვთქვათ, $V_0 \subset X - x_0$ და $V \subset L_{\varsigma_0} - \varsigma_0$ იყოს ამოზნექილი შემოსაზღვრული ნულის მიდამოები. არსებობს რიცხვი $\varepsilon_1 \in (0,1)$ ისეთი, რომ

$$\varepsilon_1 co(\{\delta x_0,...,\delta x_m\}) \subset V_0,\ \varepsilon_1 co(\{\delta\varsigma_0,...,\delta\varsigma_m\}) \subset V.$$

(იხ. (5.21) და (5.22)). აქედან გამომდინარე,

$$\varepsilon_1 co(\{\delta z_0,...,\delta z_m\}) \subset V_0 \times V. \tag{5.24}$$

ვთქვათ, $W(\varepsilon) = \varepsilon\varepsilon_1, \varepsilon \in (0,1)$. ლემა (5.8)-დან გამომდინარეობს ისეთი $\varepsilon_2 \in (0,1)$ რიცხვის არსებობა, რომ

$$z_0 + w(\varepsilon)\delta z \in D, \forall(\varepsilon, \delta z) \in (0, \varepsilon_2) \times V_0 \times V.$$

აღვნიშნოთ $d > 0$ მანძილი $0 \in E_{dp}^m$ წერტილიდან შემოსაზღვრულ $co(\{dp_0,...,dp_m\})$ სიმპლექსამდე.

(5.1) ასახვის დიფერენციალობით z_0 წერტილში არსებობს $\varepsilon_3 \in (0, \varepsilon_2)$ ისეთი, რომ

$$P(z_0 + w(\varepsilon)\delta z) = P(z_0) + w(\varepsilon) dP_{z_0}(\delta z) + o(w(\varepsilon)\delta z)$$

$$\forall(\varepsilon, \delta z) \in (0, \varepsilon_3) \times V_0 \times V; \tag{5.25}$$

ამასთან,

$$\left|o(w(\varepsilon)\delta z)\right| / w(\varepsilon) \le d/3, \forall(\varepsilon, \delta z) \in (0, \varepsilon_3) \times V_0 \times V. \tag{5.26}$$

ცხადია, (5.24)-თვის (5.25) და (5.26) ადგილი აქვს მიმართებებს $\forall(\varepsilon, \delta z) \in (0, \varepsilon_3) \times co(\{\delta z_0,...,\delta z_m\})$.

(5.11) ასახვა არის უწყვეტი $co(W_3)$-ზე $X \times L_{\varsigma_0}$ სივრცის ტოპოლოგიაში. (5.25)-ის გამოყენებით დავასკვნით, რომ ყოველი $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$, ფუნქცია $o(w(\varepsilon)\delta z)$ უწყვეტია $co(\{\delta x_0,...,\delta x_m\})$ სიმპლექსზე.

გარდა ამისა, არის P ასახვის უწყვეტობით $co(W_3)$-ზე და კომპაქტურობით $z_0 + w(\varepsilon) co(\{\delta z_0,...,\delta z_k\}) \subset co(W_3)$ გამომდინარეობს, რომ ყოველი $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$, არსებობსნულის $V_\varepsilon \subset E_z$ მიდამო რომ როცა

$$z' \in z_0 + w(\varepsilon) co(\{\delta x_0,...,\delta x_m\}), z'' \in co(w_3), z' - z'' \in V_\varepsilon, \tag{5.27}$$

გვაქვს

$$\left| p(z') - p(z'') \right| \le w(\varepsilon) d / 3 \tag{5.28}$$

(იხ ლემა 5.6).

(5.13) –(5.14) პირობებით და (5.19) მიმართებით პირდაპირ გამომდინარეობს უწყვეტ ასახვათა ოჯახის არსებობა

$$\phi_\varepsilon : co(\{z_0, z_0 + \delta z_0, ..., z_0 + \delta z_m\}) \to W_4,$$

დამოკიდებული $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$ და აკმაყოფილებს პირობას

$$(z - \phi_\varepsilon(z)) \in V_\varepsilon, \quad \forall z \in co(\{z_0, z_0 + \delta z_0, ..., z_0 + \delta z_m\}).$$

როცა $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$, სიმპლექსი $z_0 + w(\varepsilon) co(\{\delta z_0, ..., \delta z_k\})$ შედის $co(\{z_0, z_0 + \delta z_0, ..., z_0 + \delta z_m\})$ სიმპლექსში (იხ. 5.19), საიდანაც მივიღებთ

$$(z - \phi_\varepsilon(z)) \in V_\varepsilon, \quad \forall z \in z_0 + w(\varepsilon) co(\{\delta z_0, ..., \delta z_m\}). \tag{5.29}$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ განტოლება

$$P(\phi_\varepsilon(z)) = P(z_0) + w(\varepsilon) p, z \in z_0 + w(3) co(\{\delta z_0, ..., \delta z_m\}). \tag{5.30}$$

ამოხსნადია z -ში საკმარისად მცირე ε და ნებისმიერი $p \in E_p^m$ აკმაყოფილებს პირობას

$$|p| \le d / 3. \tag{5.31}$$

მართლაც გადავწეროთ განტოლება შემდეგი ფორმით

$$P(z) = P(z_0) + w(\varepsilon) p + P(z) - P(\phi_\varepsilon(z)), z \in z_0 + w(3) co(\{\delta z_0, ..., \delta z_m\}),$$

ან გამოვიყენოთ (5.24) შემდეგი განტოლების სახით δz -ში :

$$P_{z_0}(\delta z) = p - \frac{o(w(\varepsilon)\delta z)}{w(\varepsilon)} + \frac{P(z_0 + w(\varepsilon)\delta z) - P(\phi_\varepsilon(z_0 w(\varepsilon)\delta z))}{w(\varepsilon)}, \tag{5.32}$$

(5.26)-(5.29) და (5.31) მიმართებებიდ გამომდინარეობს

$$p-\frac{o(w(\varepsilon)\delta z)}{w(\varepsilon)}+\frac{P(z_0+w(\varepsilon)\delta z)-P(\varphi_\varepsilon(z_0 w(\varepsilon)\delta z))}{w(\varepsilon)}\in co(\{\delta p_0,...,\delta p_m\}) \tag{5.33}$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ (5.32) განტოლება ეკვივალენტურია განტოლების

$$\delta z=P_{z_0}^{-1}(\delta z)\left(p-\frac{o(w(\varepsilon)\delta z)}{w(\varepsilon)}+\frac{P(z_0+w(\varepsilon)\delta z)-P(\phi_\varepsilon(z_0 w(\varepsilon)\delta z))}{w(\varepsilon)}\right) \tag{5.34}$$

სადაც

$$dP_{z_0}^{-1}:co(\{\delta p_0,...,\delta p_m\})\to co(\{dz_0,...,dz_m\})$$

არის (5.18) ასახვის უწყვეტი შეუღლებული ასახვა.

ჩვენ შეგვიძლია (5.34) განტოლების მარჯვენა მხარე განვიხილოთ, როგორც $co(\{dz_0,...,dz_m\})$ სიმპლექსის საკუთარ თავში ასახვა, და აქედან ამ ასახვის ყოველი ფიქსირებული წერტილი არის (5.34) განტოლების ამონახსნი (იხ. თეორემა 5.4). ამდენად დავამტკიცეთ განტოლების ამოხსნადობა ნებისმიერი p , რომელიც აკმაყოფილებს (5.31) და ამდენად, (5.11) განტოლების ამოხსნადობა p -თვის, რომლის მოდულისაკმარისად მცირეა.

5.4. თეორემა 5.2 დამტკიცება

(5.2) სიმრავლე, წარმოადგენს წრფივი ასახვით განსაზღვრული ამოზნექილი სიმრავლის სახეს, რომელიც აგრეთვე არის ამოზნექილი. აქედან გამომდინარე $0\in E_{dp}^m$ არის (5.2) ამოზნექილი სიმრავლის შემოსაზღვრული წერტილი, თეორემა (5.5)-ის თანახმად არსებობს არანულოვანი m -განზომილებიანი ვექტორი, რომლისთვისაც

$$\pi dP_{z_0}(\delta z)=\leq 0,\forall\delta z\in cone(co(\hat{W})-z_0).$$

ეს ნიშნავს (5.33)-ს.

დ ა ს კ ვ ნ ა

დამტკიცებულია თეორემა კვაზიამოზნექილ ფილტრზე განსაზღვრული უწყვეტი ასახვის კრიტიკულობის აუცილებელი პირობის შესახებ. კრიტიკულობის აუცილებელი პირობა მნიშნელოვან როლს თამაშობს ოპტიმალური ამოცანების გამოკვლევაში. სახელდობრ , კრიტიკულობის აუცილებელი პირობიდან ოპტიმალური ამოცანისთვის გამომდინარეობს ოპტიმალურობის ყველა აუცილებელი პირობა.

ლიტერატურა

1. R. V. Gamkrelidze and G. L. Kharatishvili, Extremal problems in linear topological spaces. 1. *Math. Syst. Theory*,**1** (1) (1967), 229-256.

2. R. V. Gamkrelidze and G. L. Kharatishvili , Extremal problems in linear topological spaces . (Russian), *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, **33** (4) (1969) ,781-839.

3. A. Robertson and V. Robertson, Topological vector spaces.(Russian), *"Mir",Moscow*, 1967.