არგუმენტების სხვაობის ვინერის ფუნქციონალის ინტეგრალური წარმოდგენა

ო. ფურთუხია
ელ-ფოსტა: omar.purtukhia@tsu.ge; o.purtukhia@gmail.com
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, ა. რაზმაძის მათემატიკის ინსტიტუტი;
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი, მათემატიკის დეპარტამენტი

როგორც ცნობილია კლარკის ფორმულა საკმაოდ აბსტრაქტულ შედეგს იძლევა ვინერის ფუნქციონალის სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენის შესახებ. რაც შეეხება ინტეგრანდის ცხადი სახის გამოსახულებას, ის შესაძლებელია მიღებულ იქნას მხოლოდ სპეციალურ შემთხვევებში. კონსტრუქციული ინტეგრალური წარმოდგენის ყველაზე უფრო ზოგადი გამოკვლევები ჩატარებულია მალივენის აღრიცხვაში. აქ კონსტრუქციული ინტეგრალური წარმოდგენა დაფუძნებულია მალივენის (სტოქასტურ) წარმოებულზე და ის ვინერის ფუნქციონალების შემთხვევაში ცნობილია როგორც კლარკ-ოკონეს ფორმულა (იხ. ოკონე, 1984), ხოლო ნორმალური მარტინგალების შემთხვევაში ($D_{2,1}^M$ კლასის ფუნქციონალებისთვის) -- კლარკ-ჰაუსმან-ოკონეს ფორმულა (იხ. მა, პროტერი და მარტინი, 1998). ჩვენ (ფურთუხია, 2003) შემოვიღეთ $D_{p,1}^M$, $1<p<2$, სივრცე და განვაზოგადეთ კლარკ-ჰაუსმან-ოკონეს ფორმულა ფუნქციონალებისთვის აღნიშნული კლასიდან. მაგრამ, ყველა ჩამოთვლილ შემთხვევაში ერთი მხრივ მოითხოვება სტოქასტური სიგლუვე და მეორე მხრივ, მაშინაც კი როცა სიგლუვე გვაქვს, ინტეგრანდში მონაწილე მალივენის წარმოებულისა და პირობითი მათემატიკური ლოდინის გამოთვლა საკმაოდ შრომატევადია.

ინტეგრანდის მოძებნის აბსოლუტურად განსხვავებული მეთოდი, ე. წ. მაქსიმუმის ტიპის ფუნქციონალებისთვის, შემოთავაზებული იყო შირიაევის, იორისა და გრავერსენის (2003, 2006) მიერ, რომელიც დაფუძნებული იყო იტოს (განზოგადებული) ფორმულისა და ლევის თეორემის გამოყენებაზე ფუნქციონალთან დაკავშირებული ლევის მარტინგალისათვის. ჩვენ (ფურთუხია, ჯაოშვილი, 2009) შემოვიღეთ სტოქასტური წარმოებულის ახალი კონსტრუქცია პუასონის ფუნქციონალებისთვის და დავადგინეთ ცხადი გამოსახულება კლარკის წარმოდგენის ინტეგრანდისთვის.

ფუნქციონალების კლასი, რომელთა მიმართაც შესაძლებელია გამოყენებულ იქნას კლარკ-ჰაუსმან-ოკონეს ფორმულა, შეზღუდულია პირობით, რომ ფუნქციონალი უნდა იყოს მალივენის აზრით დიფერენცირებადი. ჩვენ (ღლონტი, ფურთუხია, 2014) განვიხილეთ შემთხვევა, როცა ფუნქციონალი არ არის დიფერენცირებადი, მაგრამ მისი პირობითი მათემატიკური ლოდინიდან გამოიყოფა დიფერენცირებადი ქვემიმდევრობა ($t\in[0,T)$ დროითი არგუმენტის მიმართ) და განვაზოგადეთ კლარკ-ჰაუსმან-ოკონეს ფორმულა. აქ ჩვენ ვიხილავთ ორი ცვლადის, არგუმენტების სხვაობის, ვინერის ფუნქციონალს $h(W_T-W_S)I_{\{W_T-W_S<K\}}$, რომელიც სტოქასტურად არადიფერენცირებადია და გამოგვყავს მისთვის სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენის ფორმულა ცხადი სახის ინტეგრანდით.

თეორემა. თუ $h\in C^1$ და მოიძებნება ისეთი $\lambda>0$, რომ $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)\exp\{-\lambda x^2\}=0$, მაშინ სამართლიანია სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენა:

$$h(W_T-W_S)I_{\{W_T-W_S<K\}}=E[h(W_T-W_S)I_{\{W_T-W_S<K\}}]+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^T\sqrt{\frac{T-S}{T^2-(T-S)t}}\int_{-\infty}^K h'(x)\exp\left\{-\frac{[Tx-(T-S)W_t]^2}{2[T^2(T-S)-(T-S)^2t]}\right\}dxdW_t\,.$$

შედეგი. $h(W_T)I_{\{W_T<K\}}=E[h(W_T)I_{\{W_T<K\}}]+\int_0^T\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{-\infty}^K h'(x)\exp\left\{-\frac{(x-W_t)^2}{2(T-t)}\right\}dxdW_t\,.$