ვილენკინის სისტემის მიმართ კერძო ჯამების ძლიერად შეჯამებადობა

მეექვსე ყოველწლიური საფაკულტეტო სამეცნიერო კონფერენცია

13 დეკემბერი, 2018 წელი

ხელმძღვანელები: ვახტანგ ცაგარეიშვილი, გიორგი ტეფნაძე

გიორგი თუთბერიძე

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

e-mail: giorgi.tutberidze257@ens.tsu.edu.ge

განმარტებები და აღნიშვნები

$\mathbb{N}_+$-ით ავღნიშნოთ მთელი არაუარყოფითი რიცხვების სიმრავლე, $\mathbb{N} := \mathbb{N}_+ \cup \{0\}$-ით კი მთელი დადებითი რიცხვების სიმრავლე.

$m := (m_0, m_1, \ldots)$ -ით აღვნიშნოთ დადებითი რიცხვების მიმდევრობა, რომლებიც არ არიან 2-ზე ნაკლებები.

განმარტებები და აღნიშვნები

$\mathbb{N}_+$-ით ავღნიშნოთ მთელი არაუარყოფითი რიცხვების სიმრავლე, $\mathbb{N} := \mathbb{N}_+ \cup \{0\}$-ით კი მთელი დადებითი რიცხვების სიმრავლე.

$m := (m_0, m_1, \dots)$ -ით აღვნიშნოთ დადებითი რიცხვების მიმდევრობა, რომლებიც არ არიან 2-ზე ნაკლებები.

აღვნიშნოთ

$$Z_{m_k} := \{0, 1, \dots, m_k - 1\}$$

ადიციური ჯგუფი რიცხვითი მოდულით m_k.

განმარტებები და აღნიშვნები

$\mathbb{N}_+$-ით ავღნიშნოთ მთელი არაუარყოფითი რიცხვების სიმრავლე, $\mathbb{N} := \mathbb{N}_+ \cup \{0\}$-ით კი მთელი დადებითი რიცხვების სიმრავლე.

$m := (m_0, m_1, \dots)$ -ით აღვნიშნოთ დადებითი რიცხვების მიმდევრობა, რომლებიც არ არიან 2-ზე ნაკლბები.
აღვნიშნოთ

$$Z_{m_k} := \{0, 1, \dots, m_k - 1\}$$

ადიციური ჯგუფი რიცხვითი მოდულით m_k.
განვმარტოთ ჯგუფი G_m როგორც პირდაპირი ნამრავლი ჯგუფის Z_{m_j} დისკრეტულ ტოპოლოგიურ ჯგუფთან Z_{m_j} 's.

$\mathbb{N}_{+}$-ით ავღნიშნოთ მთელი არაუარყოფითი რიცხვების სიმრავლე, $\mathbb{N} := \mathbb{N}_{+} \cup \{0\}$-ით კი მთელი დადებითი რიცხვების სიმრავლე.

$m := (m_0, m_1, \dots)$ -ით აღვნიშნოთ დადებითი რიცხვების მიმდევრობა, რომლებიც არ არიან 2-ზე ნაკლბები.

აღვნიშნოთ

$$Z_{m_k} := \{0, 1, \dots, m_k - 1\}$$

ადიციური ჯგუფი რიცხვითი მოდულით m_k.

განვმარტოთ ჯგუფი G_m როგორ პირდაპირი ნამრავლი ჯგუფის Z_{m_j} დისკრეტულ ტოპოლოგიურ ჯგუფთან Z_{m_j} ’s.

μ ზომების პირდაპირი ნამრავლი

$$\mu_k(\{j\}) := 1/m_k \qquad (j \in Z_{m_k})$$

არის ჰაარის ზომა G_m -ზე $\mu(G_m) = 1$-თან ერთად.

განმარტებები და აღნიშვნები

$\mathbb{N}_+$-ით ავღნიშნოთ მთელი არაუარყოფითი რიცხვების სიმრავლე, $\mathbb{N} := \mathbb{N}_+ \cup \{0\}$-ით კი მთელი დადებითი რიცხვების სიმრავლე.

$m := (m_0, m_1, \dots)$ -ით აღვნიშნოთ დადებითი რიცხვების მიმდევრობა, რომლებიც არ არიან 2-ზე ნაკლბები.

აღვნიშნოთ

$$Z_{m_k} := \{0, 1, \dots, m_k - 1\}$$

ადიციური ჯგუფი რიცხვითი მოდულით m_k.

განვმარტოთ ჯგუფი G_m როგორ პირდაპირი ნამრავლი ჯგუფის Z_{m_j} დისკრეტულ ტოპოლოგიურ ჯგუფთან Z_{m_j} 's.

μ ზომების პირდაპირი ნამრავლი

$$\mu_k(\{j\}) := 1/m_k \qquad (j \in Z_{m_k})$$

არის ჰაარის ზომა G_m -ზე $\mu(G_m) = 1$-თან ერთად.

განმარტებები და აღნიშვნები

თუ $\sup_{n\in\mathbb{N}} m_n < \infty$, მაშინ ჩვენ დავუძახოთ G_m-ს შემოსაზღვრული ვილენკინის ჯგუფი. თუ მიმდევრობა m არ არის შემოსაზღვრული მაშინ G_m -ზე ვიტყვით, რომ ის არის შემოუსაზღვრელი ვილენკინის ჯგუფი.

ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ შემოსაზღვრულ ვილენკინის სისტემებს.

განმარტებები და აღნიშვნები

თუ $\sup_{n\in\mathbb{N}} m_n < \infty$, მაშინ ჩვენ დავუძახოთ G_m-ს შემოსაზღვრული ვილენკინის ჯგუფი. თუ მიმდევრობა m არ არის შემოსაზღვრული მაშინ G_m -ზე ვიტყვით, რომ ის არის შემოუსაზღვრელი ვილენკინის ჯგუფი.

ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ შემოსაზღვრულ ვილენკინის სისტემებს.

G_m-ის ელემენტები არიან წარმოდგენილი

$$x := (x_0, x_1, \dots, x_k, \dots) \qquad (x_k \in Z_{m_k})$$

მიმდევრობებით.

განმარტებები და აღნიშვნები

თუ $\sup_{n\in\mathbb{N}} m_n < \infty$, მაშინ ჩვენ დავუძახოთ G_m-ს შემოსაზღვრული ვილენკინის ჯგუფი. თუ მიმდევრობა m არ არის შემოსაზღვრული მაშინ G_m -ზე ვიტყვით, რომ ის არის შემოუსაზღვრელი ვილენკინის ჯგუფი.

ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ შემოსაზღვრულ ვილენკინის სისტემებს.

G_m-ის ელემენტები არიან წარმოდგენილი

$$x := (x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots) \qquad (x_k \in Z_{m_k})$$

მიმდევრობებით.

G_m-ს მიდამოს შევუსაბამოთ შემდეგი ბაზისი

$$I_0(x) := G_m,$$

$$I_n(x) := \{y \in G_m \mid y_0 = x_0, \ldots, y_{n-1} = x_{n-1}\} \; (x \in G_m, \; n \in \mathbb{N})$$

განმარტებები და აღნიშვნები

თუ $\sup_{n\in\mathbb{N}} m_n < \infty$, მაშინ ჩვენ დავუძახოთ G_m-ს შემოსაზღვრული ვილენკინის ჯგუფი. თუ მიმდევრობა m არ არის შემოსაზღვრული მაშინ G_m -ზე ვიტყვით, რომ ის არის შემოუსაზღვრელი ვილენკინის ჯგუფი.

ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ შემოსაზღვრულ ვილენკინის სისტემებს.

G_m-ის ელემენტები არიან წარმოდგენილი

$$x := (x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots) \qquad (x_k \in Z_{m_k})$$

მიმდევრობებით.

G_m-ს მიდამოს შევუსაბამოთ შემდეგი ბაზისი

$$I_0(x) := G_m,$$

$$I_n(x) := \{y \in G_m \mid y_0 = x_0, \ldots, y_{n-1} = x_{n-1}\} \; (x \in G_m,\; n \in \mathbb{N})$$

განმარტებები და აღნიშვნები

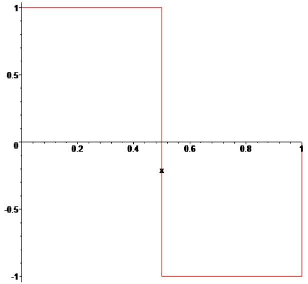
განვსაზღვროთ ე.წ. განზოგადებულ რიცხვით სისტემა ბაზისით m-ზე შემდეგნაირად:

$$M_0 := 1, \qquad M_{k+1} := m_k M_k \qquad (k \in \mathbb{N})$$

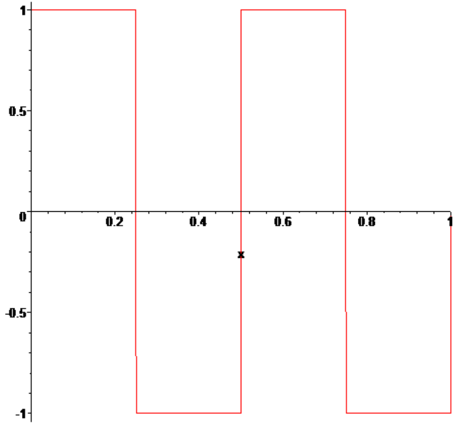
ყველა $n \in \mathbb{N}$ შეიძლება იყოს ცალსახად გამოსახული $n = \sum_{k=0}^{\infty} n_j M_j$-ით, სადაც $n_j \in Z_{m_j}$ $(j \in \mathbb{N})$ და n_j ნულისაგან განსხვავებული სასრული რიცხვია.

რადემახარის ფუნქციები განიმარტება შემდეგნაირად :

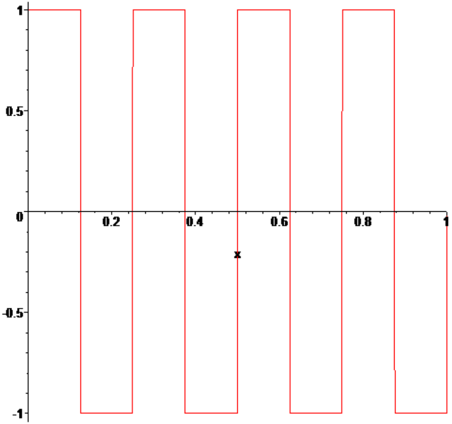
$$r_k(x) := (-1)^{x_k} \quad (x \in G, k \in \mathbb{N})$$



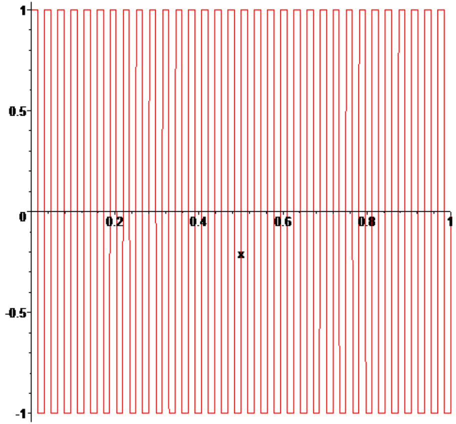
განმარტები და აღნიშვნები



განმარტები და აღნიშვნები



განმარტები და აღნიშვნები



განმარტებები და აღნიშვნები

G_m-ზე შემოვიღოთ ორთონორმირებული სისტემა, რომელსაც უწოდებენ ვილენკინის სისტემას.

განვსაზღვროთ კომპლექსური სისდიდის ფუნქცია $r_k(x) : G_m \to \mathbb{C}$, როგორც განზოგადებული რადემახარის ფუნქცია

$$r_k(x) := \exp(2\pi\imath x_k/m_k) \qquad \left(\imath^2 = -1,\ x \in G_m,\ k \in \mathbb{N}\right).$$

G_m-ზე შემოვიღოთ ორთონორმირებული სისტემა, რომელსაც უწოდებენ ვილენკინის სისტემას.
განვსაზღვროთ კომპლექსური სისდიდის ფუნქცია $r_k(x) : G_m \to \mathbb{C}$, როგორც განზოგადებული რადემახარის ფუნქცია

$$r_k(x) := \exp\left(2\pi \imath x_k / m_k\right) \qquad \left(\imath^2 = -1,\ x \in G_m,\ k \in \mathbb{N}\right).$$

განვსაზღვროთ ვილენკისნის სისტემა $\psi := (\psi_n : n \in \mathbb{N})$ G_m-ზე შემდეგნაირდ:

$$\psi_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

G_m-ზე შემოვიღოთ ორთონორმირებული სისტემა, რომელსაც უწოდებენ ვილენკინის სისტემას.
განვსაზღვროთ კომპლექსური სისდიდის ფუნქცია $r_k(x) : G_m \to \mathbb{C}$, როგორც განზოგადებული რადემახარის ფუნქცია

$$r_k(x) := \exp(2\pi\imath x_k/m_k) \qquad \left(\imath^2 = -1,\ x \in G_m,\ k \in \mathbb{N}\right).$$

განვსაზღვროთ ვილენკისნის სისტემა $\psi := (\psi_n : n \in \mathbb{N})$ G_m-ზე შემდეგნაირდ:

$$\psi_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

სისტემას დავუძახოთ უოლში-პალის სისტემა მაშინ როცა $m_k = 2, \quad k \in \mathbb{N}.$

განმარტებები და აღნიშვნები

G_m-ზე შემოვიღოთ ორთონორმირებული სისტემა, რომელსაც უწოდებენ ვილენკინის სისტემას.
განვსაზღვროთ კომპლექსური სისდიდის ფუნქცია $r_k(x) : G_m \to \mathbb{C}$, როგორც განზოგადებული რადემახარის ფუნქცია

$$r_k(x) := \exp(2\pi\imath x_k/m_k) \qquad \left(\imath^2 = -1,\ x \in G_m,\ k \in \mathbb{N}\right).$$

განვსაზღვროთ ვილენკისნის სისტემა $\psi := (\psi_n : n \in \mathbb{N})$ G_m-ზე შემდეგნაირდ:

$$\psi_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

სისტემას დავუძახოთ უოლში-პალის სისტემა მაშინ როცა $m_k = 2,\ \ k \in \mathbb{N}$.

ნორმა (ან კვაზი ნორმა) $L_p(G_m)$ სივრცეში არის განსაზღვრული შემდეგი ტოლობით

$$\|f\|_p := \left(\int_{G_m} |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p} \qquad (0 < p < \infty).$$

ვილენკინის სისტემა არის ორთონორმალური და სრული $L_2(G_m)$-ში.

განმარტებები და აღნიშვნები

ნორმა (ან კვაზი ნორმა) $L_p(G_m)$ სივრცეში არის განსაზღვრული შემდეგი ტოლობით

$$\|f\|_p := \left(\int_{G_m} |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} \qquad (0 < p < \infty) \, .$$

ვილენკინის სისტემა არის ორთონორმალური და სრული $L_2\,(G_m)$ -ში.

განმარტებები და აღნიშვნები

თუ $f \in L_1(G_m)$ ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ ფურიეს კოეფიციენტები, ფურიეს მწკრივების კერძო ჯამები, დირიხლეს გული ვილენკინის სისტემების მიმართ შემდეგნაირად:

$$\widehat{f}(k) := \int_{G_m} f\overline{\psi}_k d\mu \quad (k \in \mathbb{N}),$$

$$S_n f := \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k)\psi_k \qquad (n \in \mathbb{N}_+, S_0 f := 0),$$

$$D_n := \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k \quad (n \in \mathbb{N}_+).$$

განმარტებები და აღნიშვნები

თუ $f \in L_1(G_m)$, მაშინ მაქსიმალური ფუნქცია არის მოცემული ტოლობით

$$f^*(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{|I_n(x)|} \left| \int_{I_n(x)} f(u)\,\mu(u) \right|.$$

ჰარდის სივრცე $H_1(G_m)$ შეიცავს ყველა ფუნქციას რომლისთვისაც

$$\|f\|_{H_1} := \|f^*\|_1 < \infty.$$

თუ $f \in L_1(G_m)$, მაშინ მაქსიმალური ფუნქცია არის მოცემული ტოლობით

$$f^{*}(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{|I_n(x)|} \left| \int_{I_n(x)} f(u) \mu(u) \right|.$$

ჰარდის სივრცე $H_1(G_m)$ შეიცავს ყველა ფუნქციას რომლისთვისაც

$$\|f\|_{H_1} := \|f^{*}\|_1 < \infty.$$

ცნობილია, რომ ვილენკინის სისტემას არ აქვს ბაზისი $L_1(G_m)$ სივრცეში. უფრო მეტიც, $H_1(G_m)$ ჰარდის სივრცეში არსებობს ისეთი ფუნქცია f რომლის კერძო ჯამები არ არიან შემოსაზღვრული L_1-ნორმით. თუმცა ქვემიმდევრობა S_{M_n}-ის კერძო ჯამი არის შემოსაზღვრული ჰარდის $H_1(G_m)$ სივრციდან ლებეგის $L_1(G_m)$ სივრცეში:

$$\left\|S_{M_k}f\right\|_1 \leq c\left\|f\right\|_{H_1} \quad (k \in \mathbb{N}). \tag{1}$$

უფრო მეტიც, შემდეგი ნორმები არიან ექვივალენტურები:

$$\left\|f\right\|_{H_1} \equiv \left\|\sup_n \left|S_{M_n}f\right|\right\|_1 . \tag{2}$$

ცნობილია, რომ ვილენკინის სისტემას არ აქვს ბაზისი $L_1(G_m)$ სივრცეში. უფრო მეტიც, $H_1(G_m)$ ჰარდის სივრცეში არსებობს ისეთი ფუნქცია f რომლის კერძო ჯამები არ არიან შემოსაზღვრული L_1-ნორმით. თუმცა ქვემიმდევრობა S_{M_n}-ის კერძო ჯამი არის შემოსაზღვრული ჰარდის $H_1(G_m)$ სივრციდან ლებეგის $L_1(G_m)$ სივრცეში:

$$\|S_{M_k}f\|_1 \leq c\,\|f\|_{H_1} \qquad (k \in \mathbb{N}). \tag{1}$$

უფრო მეტიც, შემდეგი ნორმები არიან ექვივალენტურები:

$$\|f\|_{H_1} \equiv \left\|\sup_n |S_{M_n}f|\right\|_1 . \tag{2}$$

ისტორიული ფაქტები

გატმა დაამტკიცა შემდეგი ძლიერად შეჯამებადობის შედეგი ყველა $f \in H_1$-სთვის:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|S_k f - f\|_1}{k} = 0.$$

აქედან გამომდინარე არსებობს აბსოლუტური კონსტანტა c, ისეთი რომ

$$\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|S_k f\|_1}{k} \le c\,\|f\|_{H_1} \quad (n = 2, 3...) \tag{3}$$

და

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|S_k f\|_1}{k} = \|f\|_{H_1},$$

ყველა $f \in H_1$-სთვის.

ისტორიული ფაქტები

გატმა დაამტკიცა შემდეგი ძლიერად შეჯამებადობის შედეგი ყველა $f \in H_1$-სთვის:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\|S_k f - f\|_1}{k} = 0.$$

აქედან გამომდინარე არსებობს აბსოლუტური კონსტანტა c, ისეთი რომ

$$\frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\|S_k f\|_1}{k} \leq c \|f\|_{H_1} \quad (n = 2, 3 \ldots) \tag{3}$$

და

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\|S_k f\|_1}{k} = \|f\|_{H_1},$$

ყველა $f \in H_1$-სთვის.

ანალოგიური შედეგი ტრიგონომეტრიული სისტემებისთვის დაამტკიცა სმიტმა, ხოლო უოლშ-პალეის სისტემებისთვის სიმონმა.

ისტორიული ფაქტები

გატმა დაამტკიცა შემდეგი ძლიერად შეჯამებადობის შედეგი ყველა $f \in H_1$-სთვის:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\|S_k f - f\|_1}{k} = 0.$$

აქედან გამომდინარე არსებობს აბსოლუტური კონსტანტა c, ისეთი რომ

$$\frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\|S_k f\|_1}{k} \leq c \|f\|_{H_1} \quad (n = 2, 3 \ldots) \tag{3}$$

და

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\|S_k f\|_1}{k} = \|f\|_{H_1},$$

ყველა $f \in H_1$-სთვის.
ანალოგიური შედეგი ტრიგონომეტრიული სისტემებისთვის დაამტკიცა სმიტიმ , ხოლო უოლში-პალეის სისტემებისთვის სიმონსმა.

ისტორიული ფაქტები

თუ ვილენკინ-ფურიეს კერძო ჯამები იყო შემოსაზღვრული H_1-დან L_1-ში ჩვენ ასევე გვექნებოდა:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_+} \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \left\|S_m f\right\|_1 \leq c \left\|f\right\|_{H_1} . \tag{4}$$

მაგრამ კერძო ჯამების შემოსაზღვრულობა არ არის სამართლიანი H_1-დან L_1-ში. თუმცა, ჩვენ გვაქვს შემდეგი უტოლობა

$$\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\left\|S_k f\right\|_1}{k} \leq c \left\|f\right\|_{H_1} \quad (n = 2, 3...) . \tag{5}$$

მეორეს მხრივ,ერთგანზომილებიანი შემთხვევისთვის ფუჯიმ და სიმონმა დაამტკიცა რომ ფეიერის საშუალოები არიან შემოსაზღვრულები H_1-დან L_1-ში, რაც ნიშნავს რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_+} \left\|\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} S_m f\right\|_1 < c \left\|f\right\|_{H_1} . \tag{6}$$

ისტორიული ფაქტები

თუ ვილენკინ-ფურიეს კერძო ჯამები იყო შემოსაზღვრული H_1-დან L_1-ში ჩვენ ასევე გვექნებოდა:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_+}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\left\|S_mf\right\|_1\leq c\left\|f\right\|_{H_1}. \tag{4}$$

მაგრამ კერძო ჯამების შემოსაზღვრულობა არ არის სამართლიანი H_1-დან L_1-ში. თუმცა, ჩვენ გვაქვს შემდეგი უტოლობა

$$\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left\|S_kf\right\|_1}{k}\leq c\left\|f\right\|_{H_1}\quad(n=2,3...). \tag{5}$$

მეორეს მხრივ,ერთგანზომილებიანი შემთხვევისთვის ფუჯიმ და სიმონმა დაამტკიცა რომ ფეიერის საშუალოები არიან შემოსაზღვრულები H_1-დან L_1-ში, რაც ნიშნავს რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_+}\left\|\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}S_mf\right\|_1<c\left\|f\right\|_{H_1}. \tag{6}$$

ჩემი შედეგი

ასე რომ ისმის ბუნებრივი კითხვა, არის სამართლიანი უტოლობა (4), რომელიც იქნება უტოლობა (6)-ის განზოგადება თუ არა?

ჩვენ ამ კითხვას გავეცით უარყოფითი პასუხი:

Theorem

არსებობს ფუნქცია $f \in H_1$, ისეთი რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \|S_k f\|_1 = \infty.$$

ჩემი შედეგი

ასე რომ ისმის ბუნებრივი კითხვა, არის სამართლიანი უტოლობა (4), რომელიც იქნება უტოლობა (6)-ის განზოგადება თუ არა?

ჩვენ ამ კითხვას გავეცით უარყოფითი პასუხი:

Theorem

არსებობს ფუნქცია $f \in H_1$, ისეთი რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \|S_k f\|_1 = \infty.$$

- G. N. AGAEV, N. Ya. VILENKIN, G. M. DZHAFARLY and A. I. RUBINSHTEIN, Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on zero-dimensional groups, Baku, Ehim, 1981 (in Russian).
- I. BLAHOTA, K. NAGY, L. E. PERSSON, G. TEPHNADZE, A sharp boundedness result concerning some maximal operators of partial sums with respect to Vilenkin systems, Georgian Math., J., (to appear).
- N. J. FUJII, A maximal inequality for H_1 functions on the generalized Walsh-Paley group, Proc. Amer. Math. Soc. 77 (1979), lll-116.
- G. GAT, Investigations of certain operators with respect to the Vilenkin system, Acta Math. Hung., 61 (1993), 131-149.

B. I. GOLUBOV, A. V. EFIMOV and V. A. SKVORTSOV, Walsh series and transforms, (Russian) Nauka, Moscow, 1987, English transl: Mathematics and its Applications, 64. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.

N. MEMIC, I. SIMON and G. TEPHNADZE, Strong convergence of two-dimensional Vilenkin-Fourier series, Math. Nachr., 289, 4 (2016) 485-500.

F. SCHIPP, W. R. WADE, P. SIMON and J. PÁL, Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis, Adam Hilger, Ltd., Bristol, 1990.

F. SCHIPP, Certain rearrangements of series in the Walsh series, Mat. Zametki, 18 (1975), 193-201.

- P. SIMON, Inverstigations wish respect to the Vilenkin sistem, Annales Univ. Sci. Budapest Eotv., Sect. Math., 28 (1985) 87-101.
- P. SIMON, Strong convergence of certain means with respect to the Walsh-Fourier series, Acta Math. Hung., 49 (1-2) (1987), 425-431.
- P. SIMON, Strong Convergence Theorem for Vilenkin-Fourier Series, J. Math. Anal. Appl., 245, (2000), pp. 52-68.
- B. SMITH, A strong convergence theorem for $H_1(T)$, in Lecture Notes in Math., 995, Springer, Berlin, 1994, 169-173.
- G. TEPHNADZE, On the partial sums of Walsh-Fourier series, Colloq. Math., 141, 2 (2015), 227-242.
- G. TEPHNADZE, A note on the norm convergence by Vilenkin-Fejér means, Georgian Math. J., 21, 4 (2014), 511-517.

- I. BLAHOTA, L. E. PERSSON, G. TEPHNADZE, Two-sided estimates of the Lebesgue constants with respect to Vilenkin systems and applications, Glasgow Math. J., doi: 10.1017/S0017089516000549.
- N. Ya. VILENKIN, On a class of complete orthonormal systems, Izv. Akad. Nauk. U.S.S.R., Ser. Mat., 11 (1947), 363-400.
- F. WEISZ, Martingale Hardy spaces and their applications in Fourier Analysis, Springer, Berlin-Heideiberg-New York, 1994.

გმადლობთ ყურადღებისათვის