ფურიეს ზოგადი კოეფიციენტები Lipα კლასის ფუნქციებისათვის

<u>გიორგი ცაგარეიშვილი.</u> ხელმძღვანელი: პროფ. ლ.გოგოლაძე

ელ-ფოსტა: giorgicagareishvili7@gmail.com

მათემატიკა, ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი, თსუ, ილია ჭავჭავაძის #1

აბსტრაქტი: ნაშრომში შესწავლილია Lipα კლასის ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტების ყოფაქცევა ზოგადი ორთონორმირებული სისტემებისთვის(ონს). ამ მიმართულებით განზოგადოებულია რამოდენიმე ცნობილი თეორემა.

1. დამხმარე განმარტებები და თეორემები

(φ_n) ფუნქციათა სისტემას ეწოდება ორთონორმირებული [0,1]-ზე, თუ:

$$\int_0^1 \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} 1, \text{როცა } m = n \\ 0, \text{როცა } m \neq n \end{cases}$$

L_2-ით აღინიშნება ისეთი f ფუნქციათა სივრცე, სადაც:

$$\int_0^1 f^2(x)dx < +\infty$$

C(0,1) არის [0,1]-ზე უწყვეტ ფუნქცათა სივრცე.

$$\omega(\delta, f) = \max_{|x-y|\le\delta} |f(x) - f(y)|$$

$\omega(\delta, f)$-ს ეწოდება $f \in C(0,1)$ ფუნქციის უწყვეტობის მოდული.

თუ $\omega(\delta, f) < K\delta^\alpha$, მაშინ ამბობენ, რომ $f \in \mathrm{Lip}\alpha$, სადაც K აბსოლუტური კონსტანტაა.

რიცხვთა შემდეგ მიმდევრობას: $C_n(f) = \int_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx$, n=1,2,… ეწოდება f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტი.

ს.სასის ([1], გვ 387) მიერ ტრიგონომეტრიული სისტემისათვის, ხოლო ბ.გოლუბოვის [2] მიერ ჰაარის სისტემისათვის დამტკიცებული იყო შემდეგი:
თეორემა A: თუ $f \in \mathrm{Lip}\alpha$ მაშინ:

$$\text{ა)} \sum_{n=1}^{\infty} |C_n(f)|^\beta < +\infty, \text{ როცა } \beta > \frac{2}{1+2\alpha}.$$

ბ)$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma}|C_n(f)| < +\infty$ როცა $\gamma < \alpha - 1/2$.

სადაც (φ_n) არის ტრიგონომეტრული ან ჰაარის სისტემაა.
2012 წელს ბ.გოლუბოვმა [3] ჰაარის სისტემისათვის დაამტკიცა უფრო ძლიერი თეორემა, კერძოდ:
თეორემა B: ვთქვათ $f \in \mathrm{Lip}\alpha$, $\alpha \in (0,1]$. მაშინ

ა)$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma}|C_n(f)|^{\beta} < +\infty$, როცა $1 + \gamma - \beta\frac{1+2\alpha}{2} < 0$. $(0 < \beta < 2)$

ბ)ყოველი $\alpha \in (0,1]$-სათვის არსებობს ფუნქცია $f_\alpha \in \mathrm{Lip}\alpha$, ისეთი, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma}|C_n(f_\alpha)|^{\beta} = +\infty, \text{ როცა } 1 + \gamma - \beta\frac{1+2\alpha}{2} = 0 \quad (0 < \beta < 2)$$

1972 წელს ს.ბოჩკარიოვმა [4] დაამტკიცა შემდეგი:

თეორემა C: ვთქვათ (φ_n) არის სრული ონს, მაშინ ყოველი $\alpha \in (0,1]$-სათვის არსებობს ფუნქცია $f_\alpha \in \mathrm{Lip}\alpha$, ისეთი, რომ

ა)$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n(f_\alpha)|^{\beta} = +\infty$, როცა $\beta = \frac{2}{1+2\alpha}$.

ბ)$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma}|C_n(f_\alpha)| = +\infty$ როცა $\gamma = \alpha - 1/2$.

ჩვენს მიერ მიღებულ იქნა შემდეგი:

თეორემა 1: ვთქვათ (φ_n) არის ონს, ისეთი, რომ ყოველი f უწყვეტი ფუნქციისათვის

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} C_k^2(f)\right)^{1/2} < M\omega\left(\frac{1}{n}, f\right) \ (1)$$

სადაც M არის აბსოლუტური კონსანტა. მაშინ ყოველი $f \in \mathrm{Lip}\alpha$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma}|C_n(f)|^{\beta} < +\infty, \text{ როცა } 1 + \gamma - \beta\frac{1+2\alpha}{2} < 0. \ (0 < \beta < 2)$$

აღსანიშნავია, რომ (1) უტოლობა სამართლიანია ჰაარის და ტრიგონომეტრიული სისტემებისთვისაც.

თეორემა 2: ვთქვათ (φ_n) არის სრული ონს, მაშინ ყოველი $\alpha \in (0,1]$-სათვის არსებობს ფუნქცია $f_\alpha \in \mathrm{Lip}\alpha$, ისეთი, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma}|C_n(f_\alpha)|^{\beta} = +\infty, \text{ როცა } 1+\gamma-\beta\frac{1+2\alpha}{2}=0 \ (0<\beta<2)$$

შენიშვნა: თეორემა (1) არის თეორემა A-ს განზოგადოება, როცა ა)$\gamma = 0$ და ბ) $\beta = 1$ ზოგადი ონს-ებისთვის

თეორემა 2 არის თეორემა C-ს განზოგადოება როცა ა) $\gamma = 0$ და ბ) $\beta = 1$. ამასთანავე თეორემა 2 არის გოლუბოვის თეორემის განზოგადოება ზოგადი ონს-ებისათვის.

ლიტერატურა

1)А. Зигмунд , Тригонометрические ряды, т. I, М., «Мир», 1965.

2)Голубов Б.И. О рядах Фурье непрерывных функций по системе Хаара, Изв. АН СССР. Сер. матем. 28 (6), 1271–1296 (1964).

3) Б. И. Голубов, Абсолютная сходимость двойных рядов из коэффициентов Фурье–Хаара функций ограниченной p-вариации, Изв. вузов. Матем., 2012, номер 6, 3–13

4) С. В. Бочкарев, Абсолютная сходимость рядов Фурье по полным ортонормированным системам, УМН, 1972, том 27, выпуск 2(164), 53–76