ჯგუფთა წარმომქმნელი სიმრავლეები

მომხსენებელი: თეონა ნადირაძე

ელ-ფოსტა: teonanadiradze1997@gmail.com

დეპარტამენტი: მათემატიკა: ალგებრა-გეომეტრია

ფაკულტეტი :   ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა

უნივერსიტეტი: ივანე ჯავახიშვილი თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

<u>განსაზღვრება.</u> (G, ●)

1) $(ab)c=a(bc)\ \forall a, b, c \in G$
2) $\exists e \in G,\ ae=ea=a \quad \forall a \in G$
3) $\forall a \in G,\ \exists a^{-1} \in G,\ aa^{-1}=a^{-1}a=e$

<u>განსაზღვრება.</u> ვთქვათ G ჯგუფია, A⊆G. მოცემული A სიმრავლის მიერ წარმოქმნილი ქვეჯგუფი ეწოდება G-ს ყველა იმ ქვეჯგუფის თანაკვეთას, რომელიც A-ს მოიცავს.

აღნიშვნა: $\langle A\rangle=\mathrm{gr}(A)=\cap H.\quad H\subseteq G,\ H\supseteq A.$

<u>თეორემა 1.</u> ვთქვათ ჯგუფია, A⊆G. მაშინ

$\langle A\rangle=\{a_1^{\varepsilon_1}\dots a_n^{\varepsilon_n} | a_i\in A,\ \varepsilon_i=\pm1,\ n=1,2,\dots\}\ (\equiv H)$

□ . აღვნიშნოთ მარჯვენა ნაწილი H-ით. რადგან ⟨A⟩ ქვეჯგუფი შეიცავს ყველა $a_i\in A$,

ამიტომ ⟨A⟩⊇H, მეორე მხრივ HH⊆H, $H^{-1}\subseteq H$ და, ამიტომ, H არის A-ს მომცველი ქვეჯგუფი. აქედან H⊇⟨A⟩ და საბოლოოდ H=⟨A⟩. □

თუ ⟨A⟩=G, მაშინ ამბობენ, რომ A არის G-ს წარმომქმნელი სიმრავლე.

I. $\mathbb{Z}=\langle 1\rangle$, $\mathbb{Z}_n=\langle 1(\mathrm{mod}\ n)\rangle$, $\mathbb{Q}=\langle \frac{1}{n}\mid n=1,2,..\rangle$, $\mathbb{Q}=\langle \frac{1}{n!}\mid n=1,2,..\rangle$,

II. $\mathbb{Z}^*=\langle -1\rangle$, $\mathbb{Q}^*=\langle -1, 2,3,5,7,11,\dots\rangle$

$\mathbb{C}=\langle \alpha_n\rangle$, $\mathbb{C}_{p^\infty}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbb{C}_{p^n}=\langle \alpha_{p^n}\mid n=1,2,\dots\rangle$

$\alpha_n=\cos\frac{2\pi}{n}+ i\sin\frac{2\pi}{n}.$

III. ალგებრის ზოგადი კურსიდან ცნობილია, რომ სიმეტრიული S_n ჯგუფი წარმოიქმნება თავისი (ij) ტრანსპოზიციებით, რადგან (ij)=(1i)(1j)(1i), ამიტომ S_n წარმოიქმნება (12)(13),...(1n) ტრანსპოზიციებითაც კი. ნიშანცვლადი A_n ჯგუფი წარმოიქმნება ყველა შესაძლო სამი სიგრძის ციკლებით, რადგან ლუწი ჩასმა არის ტრანსპოზიციათა ლუწი რიცხვის ნამრავლი და (ij)(ik)=(ijk), (ij)(kl)=(ij)(ik)(ki)(kl)=(ijk)(kil).

IV. ვთქვათ K რგოლია. $GL_n(K)$-ში განვიხილოთ მატრიცები

$t_{ij}(\alpha)=e+\alpha e_{ij}$, $d(\beta)=e+(\beta_{-1})\, e_{nn}$,

$\alpha, \beta\in K,\ \beta\neq 0,\ i\neq j$,

სადაც e-ერთეულოვანი მატრიცაა, e_{ij} მატრიცაა, რომლის (i, j) ადგილზე დგას 1, ხოლო დანარჩენ ადგილებზე ნული. მატრიცებს $t_{ij}(\alpha)$ როცა $\alpha\neq 0$ ეწოდება <u>**ტრანსვექციები**</u>.

ცნობილია, რომ ყოველი მატრიცი $GL_n(K)$- დან წარმოიდგინება

$t_1\dots t_r d(\beta)\, t_{r+1}\dots t_s$, სადაც t_i ტრანსვექციებია.

□. მართლაც, მატრიცის გამრავლება ტრანსვექციაზე მარჯვნიდან ტოლფასია მისი ერთ სვეტისა და მეორე სვეტის α ∈K სკალარზე ნამრავლის ჯამისა, ხოლო ტრანსვექციაზე გამრავლება მარცხნიდან ტოლფასია სტრიქონთა ანალოგიური გარდაქმნისა. მატრიცთა ასეთ გარდაქმნებს ვუწოდოთ ელემენტარული გარდაქმნები.

სვეტების ელემენტარული გარდაქმნების შედეგად შეგვიძლია, მივაღწიოთ იმას, რომ a_{12} იყოს ნულისაგან განსხვავებული. თუ შევასრულებთ კიდევ ერთ ელემენტარულ გარდაქმნას- დავუმატებთ პირველ სვეტს მეორეს გამრავლებულს $\frac{1-a_{11}}{a_{12}}$-ზე, მივიღებთ ერთიანს (1,1) ადგილზე, ხოლო შემდეგ მისი საშუალებით მივიღებთ ნულებს მოცემული მატრიცის პირველ სტრიქონსა და პირველ სვეტში გარდა (1,1) ადგილისა, სადაც დავტოვებთ ერთიანს. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ მარჯვენა (n-1) რიგის უჯრედში ბოლოსდაბოლოს მივალთ d(β) ტიპის მატრიცამდე, სადაც β=det$a$. ამგვარად, a=t_1... t_rd(β) t_{r+1}…t_s, სადაც t_i ტრანსვექციებია. □

კერძოდ,

$GL_n(K)=\langle t_{ij}(\alpha), d(\beta) \mid \alpha, \beta \in K,\ i\neq j \rangle$,

$SL_n((K)=\langle t_{ij}(\alpha), \mid \alpha \in K,\ i\neq j \rangle$,

$T_n(k)=\langle t_{ij}(\alpha), \mathrm{diag}\, (\beta_1,\dots \beta_n) \mid \alpha, \beta \in K,\ i<j \rangle$,

$UT_n(k)=\langle t_{ij}(\alpha), \mid \alpha \in K, j-i\geq 1\rangle$.

$UT_n^m(k)=\langle t_{ij}(\alpha), \mid \alpha \in K, j-i\geq m, 1\leq m\leq n \rangle$.

<u>**ამოცანა 1**</u>. ვთქვათ n≥2, $p_1,\dots p_n$- განსხვავებული მარტივი რიცხვებია, $\overline{p_i}=p_1\dots p_{i-1}. p_{i+1}\dots p_n$. მაშინ

$\mathbb{Z}=gr(\overline{p_1},\dots,\overline{p_n})$,

და არც ერთი ელემენტის მოცილება არ შეიძლება ამ წარმომქმნელი სიმრავლიდან.

<u>**ამოხსნა.**</u> ადვილი დასანახია, რომ $(\overline{p_1},\dots,\overline{p_n})=1$, ამიტომ $\langle\overline{p_1},\dots,\overline{p_n}\rangle=1$.

თუკი რომელიმე $\overline{p_i}$-ს 1≤i≤n ჩამოვაცილებთ, მაშინ ერთობლიობაში თანამარტივობა დაირღვევა და $\langle\overline{p_1},\dots,\overline{p_{i-1}},\overline{p_{i+1}},\dots,\overline{p_n}\rangle\neq\mathbb{Z}$

<u>**ამოცანა 2.**</u> S_n= gr ((12), (12…n)).

<u>**ამოხსნა.**</u> a=(1,2), b=(12...n), მართლაც, $b^{-k}ab^{k}$=(k+1)(k+2), k≤n-2.

თუ ახლა i<j-1, მაშინ (j,j-1)…(i+2,i+1)(i,i+1)(i+1,i+2)…(j-1,j)=(ij). ესე იგი $\langle a,b\rangle$ შეიცავს ყველა ტრანსპოზიციას და ამიტომ ემთხვევა მთელ სიმეტრიულ S_n ჯგუფს.

<u>**ამოცანა 3.**</u>

$SL_n(\mathbb{Z})=gr\ (t_{ij}(1), \mid 1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n, i\neq j)$

ჯგუფის წარმომქმნელთა სიმრავლის ანტიპოდია <u>**ფრატინის ქვეჯგუფი**</u>.

<u>**განსაზღვრება.**</u> G ჯგუფის g ელემენტს ეწოდება <u>**არაწარმომქმნელი ელემენტი**</u> G-თვის, თუ ის შეიძლება მოვაცილოთ G-ს ნებისმიერ წარმომქმნელ სიმრავლეს, რომელშიც ის შედის:

$g\in A\subseteq G=\langle A\rangle \Rightarrow G=\langle A\setminus\{g\}\rangle$.

მაგალითად, ერთეული ნებისმიერი ჯგუფისათვის არაწარმომქმნელი ელემენტია.

განსაზღვრება. G ჯგუფის M ქვეჯგუფს ეწოდება G-ს მაქსიმალური ქვეჯგუფი, თუ $M \neq G$ და $M < H \leq G \Rightarrow H = G$. წერენ $M <\bullet G$.

განსაზღვრება. G ჯგუფის **ფრატინის ქვეჯგუფი** $\Phi(G)$ ეწოდება ყველა მისი მაქსიმალური ქვეჯგუფის თანაკვეთას, თუ ისინი არსებობენ, და თვითონ G წინააღმდეგ შემთხვევაში.

თეორემა 2. G ჯგუფის ყველა არაწარმომქმნელ ელემენტთა S სიმრავლე $\Phi(G)$ -ს ემთხვევა.

□. $S \subseteq \Phi(G)$. მართლაც, თუ G არ მოიცავს მაქსიმალურ ქვეჯგუფებს, მაშინ $\Phi(G) = G$ და დებულება ცხადია. ვთქვათ $x \in S$ და $H <\bullet G$. თუ $x \notin H$, მაშინ $\langle x, H\rangle = G$ და $\langle H\rangle \neq G$, რაც ეწინააღმდეგება $x \in H$ ჩართვას. ამიტომ $x \in S$, ე.ი $x \in \Phi(G)$.

$\Phi(G) \subseteq S$. დავუშვათ წინააღმდეგი, ე.ი $G = \langle M, x\rangle$, სადაც $M \subseteq G$ და $x \in \Phi(G)$, მაგრამ $G \neq \langle M\rangle$. ცორნის ლემის თანახმად არსებობს G-ს ისეთი H ქვეჯგუფი, რომელიც მაქსიმალურია იმ ქვეჯგუფებს შორის, რომლებიც შეიცავენ M-ს, მაგრამ არ შეიცავენ x-ს. ქვეჯგუფი H ისეა არჩეული, რომ G-ს ნებისმიერი ქვეჯგუფი, რომელიც მკაცრად მოიცავს H-ს, უნდა შეიცავდეს x-საც. ამგვარად, $H <\bullet G$. მაგრამ მაშინ $x \in \Phi(G) \leq H$, წინააღმდეგობა. □

ამოცანა. მთელ რიცხვთა $\mathbb{Z}$ ჯგუფში $\langle p\rangle$ ქვეჯგუფი მაქსიმალურია ნებისმიერი მარტივი p-თვის, ამიტომ $\Phi(Z) = 0$.

ამოხსნა. მართლაც, $\langle p\rangle <\bullet \mathbb{Z}$. ნებისმიერი მარტივი p-თვის. რადგან თუ $\langle p\rangle < H \leq \mathbb{Z}$, მაშინ H შეიცავს ისეთ მთელ რიცხვს n-ს, რომელიც p-სთან თანამარტივია და ამიტომ არსებობს ისეთი მთელი რიცხვები r და s, რომ $1 = rp + sn \in H$ ანუ $H = \mathbb{Z}$.

თუ $\bigcap_{i=1}^{\infty} \langle p_i \rangle$ შეიცავს არანულოვან მთელ რიცხვს, მაშინ ის უნდა გაიყოს ყველა მარტივ რიცხვზე, რაც ეწინააღმდეგება მარტივ რიცხვთა რაოდენობის უსასრულობას. ამიტომ, $\Phi(Z) = 0$.

ამოცანა. რადგან $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\langle \frac{1}{n!} \right\rangle$ ამის გამო, მისი ყოველი ელემენტი არაწარმომქმნელია, ამიტომ $\Phi(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

ამოცანა. რადგან $C_{p^\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{p^n}$, ამის გამო მისი ყოველი ელემენტი არაწარმომქმნელია. ამიტომ $\Phi(C_{p^\infty}) = C_{p^\infty}$.

ამოცანა. სიმეტრიული S_n ჯგუფის H_i ქვეჯგუფი, რომელიც შედგება იმ ჩასმისაგან, რომელიც უძრავად ტოვებს i სიმბოლოს, მაქსიმალურია S_n-ში. რადგან $H_1 \cap \ldots \cap H_n$ თანაკვეთა 1-ის ტოლია, ამიტომ $\Phi(S_n) = 1$. ანალოგიურად $\Phi(A_n) = 1$.

ამოცანა. გამოვყოთ $UT_n(\mathbb{Z})$ჯგუფში H_{ip} ქვეჯგუფი, რომელიც შედგება ყველა x მატრიცისაგან პირობით $x_{i,i+1} \in \langle p\rangle$, $1 \leq i \leq n-1$, p მარტივი რიცხვია. ქვეჯგუფი H_{ip} მაქსიმალურია $UT_n(\mathbb{Z})$-ში. ყველა H_{ip}-ს თანაკვეთა შედის $UT_n^2(\mathbb{Z})$-ში, ამიტომ $\Phi(UT_n(\mathbb{Z})) \leq UT_n^2(\mathbb{Z})$.

ლიტერატურა:

1) Холл. М. Теория групп- М.: Ил,1962.
2) Курош А.Г. Теория групп _4-е изд.- СПб.: Лань, 2005
3) Каргаполов М.И. Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. 5 -е изд.- СПб.: Лань, 2009