ალგებრული ამოცანების ამოხსნა
გეომეტრიისა და ტრიგონომეტრიის გამოყენებით

მომხსენებელი: ივ. ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
მათემატიკის ფაკულტეტის
დოქტორანტი სოლომონ კურტანიძე

ხელმძღვანელები: თსუ ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი
მათემატიკის ინსტიტუტის უფროსი მეცნიერი თანამშრომელი,
ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფესორი თემურ ჯანგველაძე

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის
პროფესორი რევაზ კაკუბავა

თბილისი,
2018 წ.

სარჩევი

ანოტაცია

განხილულია ალგებრული ამოცანები და ამოხსნილია გეომეტრიული და ტრიგონომეტრიული გზებით. კერძოდ, გამოყენებულია კოსინუსების თეორემა, პითაგორას თეორემა, სამკუთხედების უტოლობა.

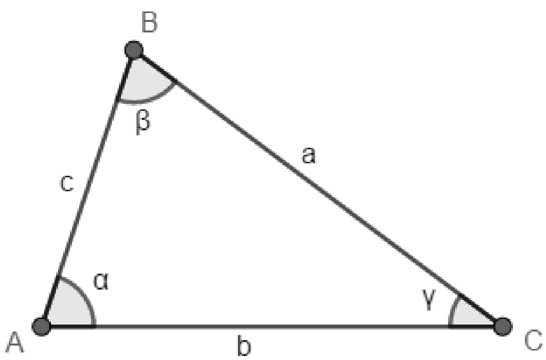
Abstract

Algebraic problems are discussed and geometric and trigonometric ways are used for to solve those problems. In particular, the Cosines theorem, Pythagoras theorem and the triangle's theorem are used.

შესავალი

განხილავთ მეთოდს, რომელიც ეყრდნობა კოსინუსების თეორემას და პითაგორას თეორემას (ჩვენ ვიხილავთ კოსინუსების თეორემას, როგორც პითაგორას თეორემის განზოგადებას).

ნებისმიერი სამკუთხედისთვის სამართლიანია $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ ტოლობა (იხ. ნახ. 1). ახლა თუ α ისეთი კუთხეა, რომლის კოსინუსის გამოთვლაც იოლია, გეომეტრიული ამოცანის ალგებრული ჩაწერა იოლდება. მაგალითად, თუ $\alpha = 60$, მაშინ $a^2 = b^2 + c^2 - bc$, თუ $\alpha = 120^o$, მაშინ $a^2 = b^2 + c^2 + bc$, ასევე წარმატებით შეგვიძლია გამოვითვალოთ, როცა $\alpha = 30^o$; $\alpha = 45^o$; $\alpha = 150^o$ და ზოგ შემთხვევებში, როცა $\alpha = 15^o$, $\alpha = 75^o$, $\alpha = 18^o k$, სადაც $k = 1; 2; 3; 4$ და ა.შ.



ნახაზი 1.

შევნიშნავთ, რომ ამ ტიპის ამოცანებში ხშირად გამოიყენება სამკუთხედის უტოლობა, ანუ თუ c იმ სამკუთხედის უდიდესი გვერდია, რომლის გვერდებია a, b და c, სრულდება $c < a + b$, ამის განზოგადებაა ის ფაქტი, რომ ორ წერტილს შორის უმოკლესი მანძილი არის ამ წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთის სიგრძე.

ამოცანების განხილვა და ამოხსნა

<u>ამოცანა N1</u>. (საკავშირო ოლიმპიადა 1984 წ. აშხაბადი, IX კლასი).

დადებითი რიცხვები x, y და z აკმაყოფილებენ შემდეგ განტოლებათა სისტემას

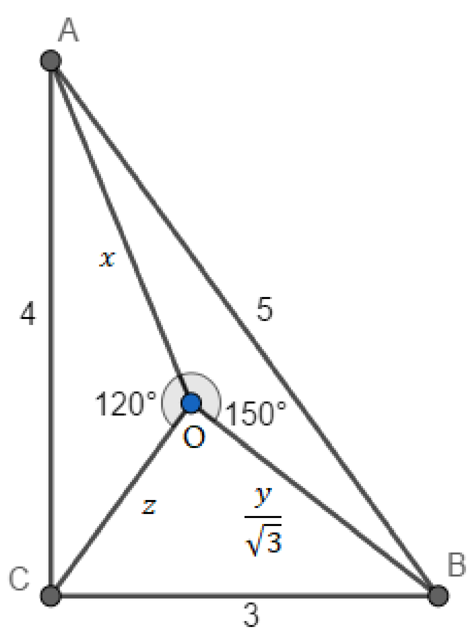
$$\begin{cases} x^2+xy+\dfrac{y^2}{3}=25 \\ \dfrac{y^2}{3}+z^2=9 \\ x^2+xz+z^2=16 \end{cases}.$$

გამოიანგარიშეთ $xy+2yz+3xz$.

<u>ამოხსნა:</u> ამ შემთხვევაში $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ ტოლობა რომ დადასტურდეს, სისტემის განტოლებები წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$5^2=x^2+\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2-2x\frac{y}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, მაგრამ $-\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 150^o$.

ანალოგურად, $4^2=x^2+z^2-2xz\left(-\frac{1}{2}\right)$, სადაც $-\frac{1}{2}=\cos 120^o$.



ნახაზი 2.

მესამე განტოლებიდან - $\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2+z^2=3^2$, მივიღეთ პითაგორას თეორემა, ანუ მესამე კუთხე 90^o-ია. ჯამში მივიღეთ სრული კუთხე და რადგან $9+16=25$, და გვერდები $3; 4; 5$ თავად გვაძლევენ მართკუთხა სამკუთხედს, გავაკეთოთ მისი შემდგომი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია (იხ. ნახ. 2). ცხადია, თუ ΔAOC და ΔAOB-თვის დავწერთ კოსინუსების თეორემას, მივიღებთ ჩვენი სისტემის შესაბამის განტოლებებს, ხოლო ΔCOB-თვის ცხადია დაიწერება პითაგორას თეორემა. მაშინ ერთის მხრივ

$S_{AOB}=\frac{4\cdot 3}{2}=6$, ხოლო მეორე მხრივ კი

$$S_{ACB}=S_{AOC}+S_{AOB}+S_{COB}=$$

$$=\frac{1}{2}xz\sin 120^o+\frac{1}{2}x\frac{y}{\sqrt{3}}\sin 150^o+z\frac{y}{\sqrt{3}}\frac{1}{2}.$$

ანუ $\frac{\sqrt{3}}{4}xz+\frac{1}{4\sqrt{3}}xy+\frac{1}{2\sqrt{3}}zy=6$, საიდანაც

$$xy + 2yz + 3xz = 24\sqrt{3}\,,$$

რისი პოვნაც გვინდოდა.

პასუხი: $24\sqrt{3}$.

შევეცადოთ ჩამოვაყალიბოთ წინა ამოცანის განზოგადებული ამოცანა:

ამოცანა N2. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა დადებითი x; y; და z-თვის.

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2 \\ y^2 + yz + z^2 = b^2 \\ z^2 + zx + x^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

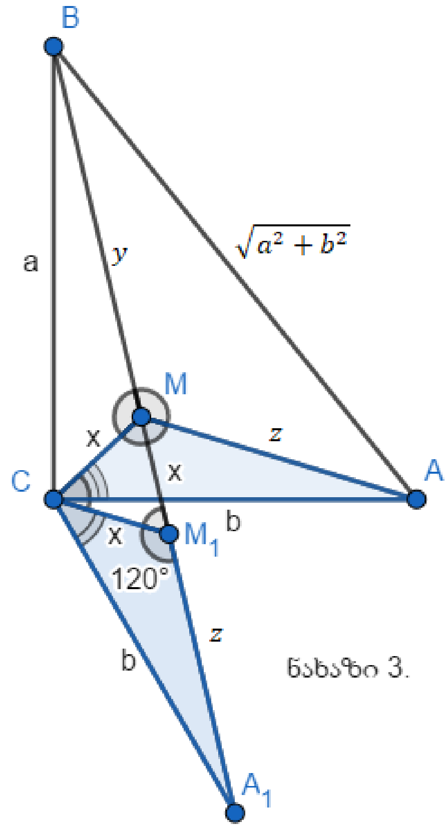
იპოვეთ $x + y + z$.

ამოხსნა: როგორც ვხედავთ, სამივე კუთხე 120^o-ია. გვაქვს ΔABM, ΔBCM და ΔACM-თვის ჩაწერილი კოსინუსების თეორემები. მაშინ, პირველი ამოცანის მსგავსად, ფართობებიდან მივიღებთ (1) $xy + yz + xz = \frac{2}{\sqrt{3}}ab$ ტოლობას (ცხადია $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120^o$). მეორე მხრივ, თუ შევკრებთ სისტემის განტოლებებს, მივიღებთ (2) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + xy + yz + zx = 2(a^2 + b^2)$ ტოლობას. ამავე დროს, სამართლიანია (3) $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ ტოლობა, მაშინ (1), (2)-სა და (3)-ს დაკავშირებით მივიღებთ:

$$2(x + y + z)^2 = 2(a^2 + b^2) + 3\frac{2}{\sqrt{3}}ab, \qquad \text{საიდანაც}$$

$$(x + y + z)^2 = a^2 + b^2 + \sqrt{3}ab,$$

საიდანაც ვიღებთ (4) $x+y+z=\sqrt{a^2+b^2+\sqrt{3}ab}$ ტოლობას. რადგან x, y და z დადებითებია, მიუხედავად გეომეტრიული წარმოდგენის სილამაზისა, აქ შეგვიძლია არანაკლებ ეფექტური მეორე მეთოდის მოშველიებაც (იხ. ნახ. 3), მოვაბრუნოთ ΔCMA 60^o-ით C წვეროს ირგვლია სამკუთხედის გარე მიმართულებით. მივიღებთ ΔCM_1A_1-ს. ცხადია, ΔCMM_1 ტოლგვერდაა. მაშინ ადვილი მისახვედრია, რომ



ნახაზი 3.

$$x+y+z=BM+MM_1+M_1A_1.$$

ამავე დროს, წერტილები B, M, M_1 და A_1 ერთ წეფეზე მდებარეობენ, რადგან

$$\angle BMC+\angle CMM_1=\angle MM_1C+\angle CM_1A_1=120^o+60^o=180^o\,.$$

ამიტომ $x+y+z=BA_1$, რადგან $\angle BCA_1$ მივიღეთ $\angle BCA=90^o$-ის 60^o-ით გაზრდით, ცხადია $\angle BCA_1=90^o+60^o=150^o$. ამიტომ, კოსინუსების თეორემითვე:

$$(x+y+z)^2=(BA_1)^2=$$
$$=a^2+b^2-2ab\cos 150^o,$$

ე.ი. $(x+y+z)^2=a^2+b^2+\sqrt{3}ab$, საიდანაც

$$x+y+z=\sqrt{a^2+b^2+\sqrt{3}ab},$$

რადგან $x>0, y>0, z>0$.

<u>პასუხი:</u> $x+y+z=\sqrt{a^2+b^2+\sqrt{3}ab}$.

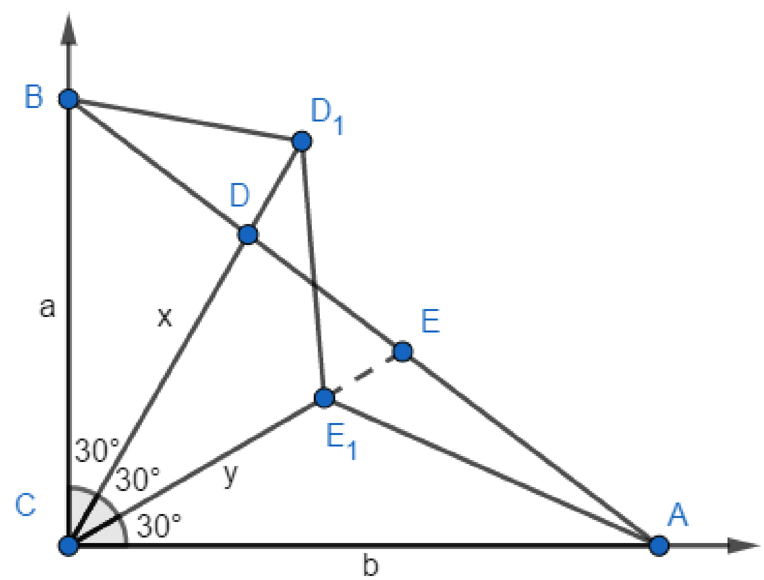
ამავე მეთოდით კეთდება შემდეგი ამოცანა.

<u>ამოცანა N3.</u> ამოხსენით განტოლება:

$$\sqrt{x^2+a^2-ax\sqrt{3}}+\sqrt{y^2+b^2-by\sqrt{3}}+\sqrt{x^2+y^2-xy\sqrt{3}}=\sqrt{a^2+b^2}$$

სადაც $a>0$; $b>0$.

ამოხსნა: ავაგოთ მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტებია a და b და მართი კუთხე გავყოთ 3 ტოლ ნაწილად (იხ. ნახ. 4). CD და CE მიმართულებებზე გადავდოთ შესაბამისად x და y-ის ტოლი D_1 და E_1 წერტილები, მაშინ კოსინუსების თეორემით, $AE_1 = \sqrt{y^2+b^2-by\sqrt{3}}$; $E_1D_1 = \sqrt{x^2+y^2-xy\sqrt{3}}$ და $D_1B = \sqrt{x^2+a^2-ax\sqrt{3}}$, ხოლო თავად $AB = \sqrt{a^2+b^2}$. ცხადია, ტეხილის სიგრძე ყოველთვის მეტია მისი ბოლოების შემაერთებელი მონაკვეთის სიგრძეზე, გარდა იმ შემთხვევისას, როცა $E = E_1$ და $D = D_1$. ამ შემთხვევისთვის x და y-ის დათვლაც სირთულეს აღარ წარმოადგენს. ახლა პირიქით, გეომეტრიული ამოცანის ამოხსნითვის გამოვიყენოთ ალგებრული (კოორდინატთა) მეთოდი. დავამთხვიოთ X ღერძი CA წრფეს, ხოლო Y ღერძი CB წრფეს.



ნახაზი 4.

$A(b;0)$ და $B(0;a)$ წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლება იქნება $y_1 = -\frac{a}{b}x + a$, CE წრფის განტოლებაა $y_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}x$, ხოლო CD-სი კი $y_3 = \sqrt{3}x$. მაშინ E წერტილის კოორდინატებია $\left(\frac{\sqrt{3}ab}{b+a\sqrt{3}}; \frac{ab}{b+a\sqrt{3}}\right)$, ხოლო D წერტილისა - $\left(\frac{ab}{a+b\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{3}ab}{a+b\sqrt{3}}\right)$. მაშინ, რადგან 30^o-იანი კუთხის წინ მდებარე კათეტი ჰიპოტენუზის ნახევრის ტოლია, ამიტომ $y = 2 \cdot \frac{ab}{b+a\sqrt{3}} = \frac{2ab}{b+a\sqrt{3}}$, ხოლო $x = 2 \cdot \frac{ab}{a+b\sqrt{3}} = \frac{2ab}{a+b\sqrt{3}}$, ყველა სხვა შემთხვევაში ტოლობა არ დამყარდება და სამართლიანი იქნება უტოლობა

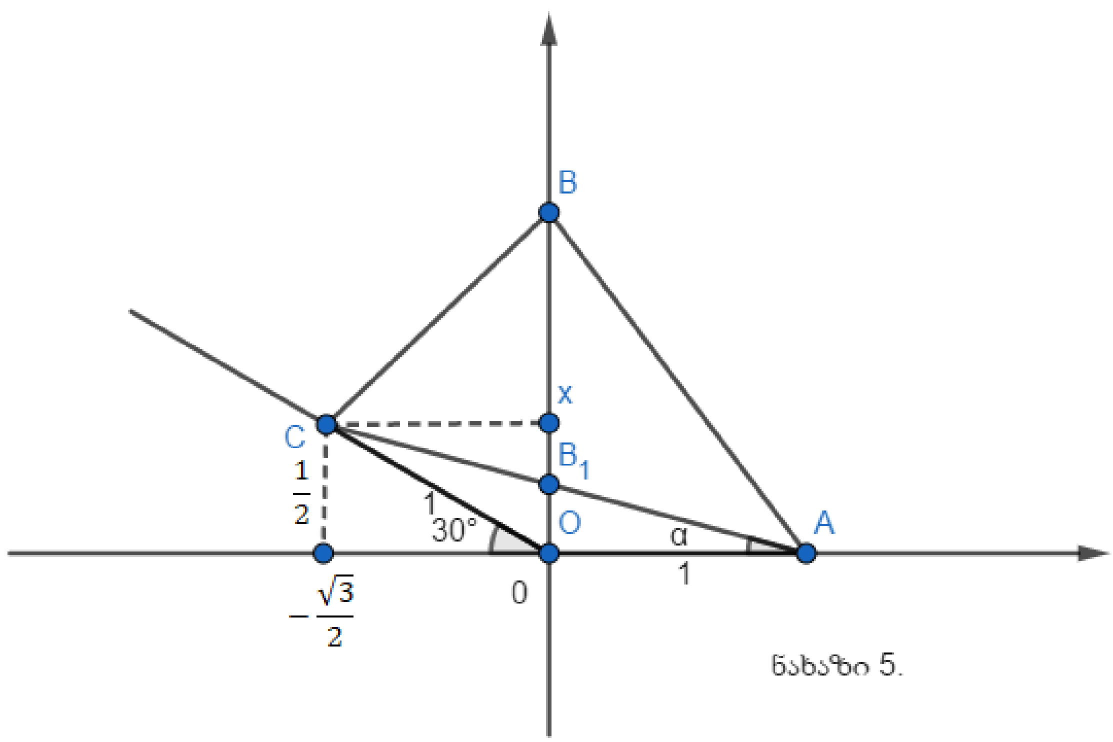
$$\sqrt{x^2+a^2-ax\sqrt{3}} + \sqrt{y^2+b^2-by\sqrt{3}} + \sqrt{x^2+y^2-xy\sqrt{3}} > \sqrt{a^2+b^2}$$

პასუხი: $x = \frac{2ab}{a+b\sqrt{3}}$, $y = \frac{2ab}{b+a\sqrt{3}}$.

სამკუთხედის უტოლობასთან კავშირშია კიდევ ერთი ამოცანა.

ამოცანა N4. იპოვეთ $f(x) = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x+x^2}$ ფუნქციის მინიმუმი.

ამოხსნა: განვიხილოთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა და $ABCO$ ოთხკუთხედი ისე, რომ წვეროების შესაბამისი კოორდინატები იყვნენ: $A(1;0)$; $B(0;x)$; $C(u;v)$; $O(0;0)$ ისე, რომ $|OC|=1$ და $\angle COB=60^o$. მაშინ ცხადია (იხ. ნახ. 5) კოსინუსების და პითაგორას თეორემებით $AB=\sqrt{1+x^2}$, ხოლო $BC=\sqrt{1+x^2-x}$. ამიტომ $f(x)=AB+BC\geq AC$ სამკუთხედის უტოლობის გამო. ცხადია, რომ თუ $f(x)=AC$, მაშინ ფუნქცია მიაღწევს თავის მინიმალურ მნიშვნელობას მაშინ, როცა B დაემთხვევა B_1-ს, ანუ როცა $x=OB_1$.



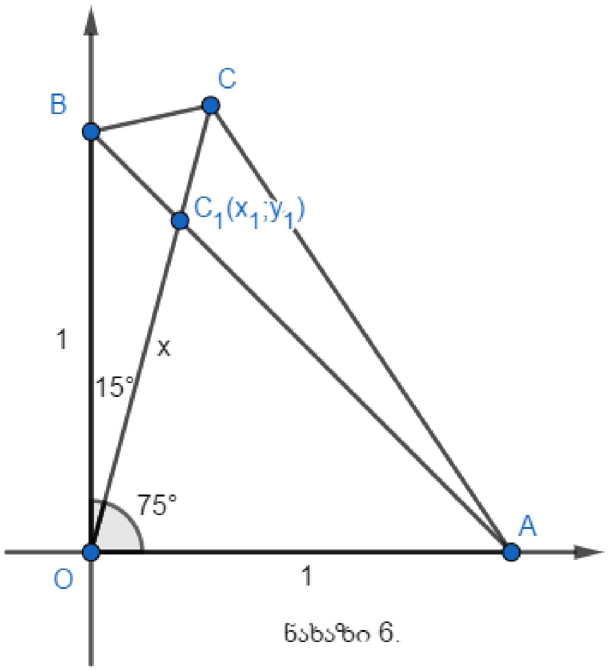
ნახაზი 5.

გამოვთვალოთ x. გვაქვს $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ და $A(1;0)$ წერტილები, მათზე გამავალი წრფის განტოლებაა $y=(\sqrt{3}-2)x+2-\sqrt{3}$, და როცა $x=0$, მაშინ $y=2-\sqrt{3}$ ანუ ესაა სწორედ საძიებელი $x=OB_1$.

<u>პასუხი:</u> $f(x)$ ფუნქცია მიაღწევს თავის მინიმუმს, როცა $x=2-\sqrt{3}$ და $\min f(x)=(2+\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}$. რაც გამოდის ΔCOA-დან კოსინუსების თეორემიდან.

<u>ამოცანა N5:</u> იპოვეთ $f(x)=\sqrt{x^2-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)x+1}+\sqrt{x^2-\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)x+1}$ ფუნქციის მინიმუმი. რომელი x-თვის მიიღწევა ის?

ამოხსნა: ეს ამოცანა ჰგავს წინა ამოცანას, მაგრამ იხსნება ოდნავ განსხვავებულად. მართლაც, განვიხილოთ დეკარტეს მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა (იხ. ნახ. 6) და წერტილები $A(1;0)$ და $B(0;1)$. ასევე კოორდინატთა სათავეზე I მეოთხედში გავავლოთ OC სხივი ისე, რომ $OC = x$ და $\angle AOC = 75^o$. მაშინ კოსინუსების თეორემით $AC^2 = x^2 + 1 - 2x\,cos75^o = x^2 - \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)x + 1$ და ანალოგურად, $BC^2 = x^2 + 1 - 2x\cos 15^o = x^2 - \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)x + 1$, საიდანაც $f(x) = AC + BC$. და ისევ სამკუთხედის უტოლობის გამო, $f(x) \geq AB = \sqrt{2}$. ახლა თუ ვაჩვენებთ, რომ $f(x) = \sqrt{2}$ მიღწევა, მაშინ ამოცანა ამოხსნილია. ცხადია ეს მოხდება მაშინ, როცა $C = C_1$, ვიპოვოთ C_1-ის კოორდინატები.



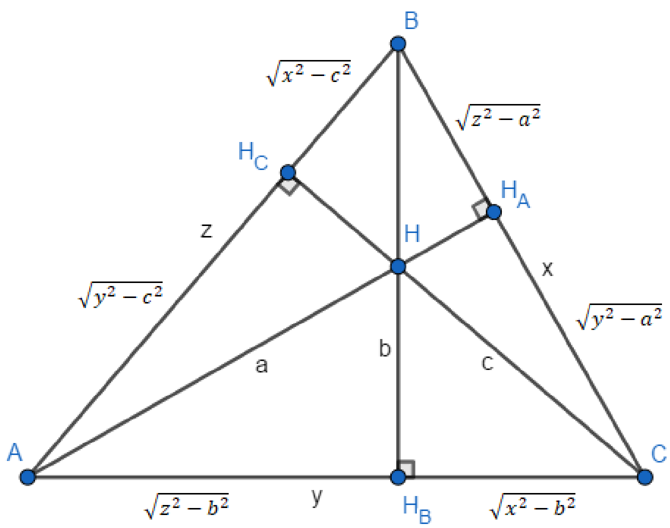
ნახაზი 6.

OC წრფის განტოლებაა $y = \tan 75^o\, x = (2+\sqrt{3})x$, ხოლო AB წრფისა - $y = -x + 1$. მაშინ C_1-ის აბსცისა იქნება $x_1 = \frac{1}{3+\sqrt{3}}$, ხოლო $y_1 = \frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$. მაშინ $|OC'| = x = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}+1}}{3+\sqrt{3}}$, საიდანაც $x^2 = \frac{4(2+\sqrt{3})}{6(2+\sqrt{3})} = \frac{2}{3}$. ანუ $x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

პასუხი: $f(x)$ აღწევს თავის მინიმალურ მნიშვნელობას $\sqrt{2}$-ში. მაშინ როცა $x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

ამოცანა N6. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა $\begin{cases} x = \sqrt{z^2 - a^2} + \sqrt{y^2 - a^2} \\ y = \sqrt{x^2 - b^2} + \sqrt{z^2 - b^2} \\ z = \sqrt{y^2 - c^2} + \sqrt{x^2 - c^2} \end{cases}$.

ამოხსნა: ცხადია $x < \sqrt{z^2} + \sqrt{y^2} = z + y$, ამიტომ x, y და z გვერდებიდან სამკუთხედი შეივსება. დავუშვათ ამ სამკუთხედში სიმაღლეები. მოწმდება აგრეთვე, რომ სამკუთხედი უნდა იყოს მახვილკუთხა, ამიტომ სიმაღლეები სამკუთხედის შიგნით გადაიკვეთებიან. ვთქვათ, შესაბამისად სწორედ ეს სიმაღლეებია a, b და c (იხ. ნახ. 7), მაშინ სისტემის სამივე განტოლება დადასტურდება.



ნახაზი 7.

ვიცით, რომ $ax = by = cz = 2S = 2\sqrt{P(P-x)(P-y)(P-z)}$, სადაც S არის ΔABC-ს ფართობი, ხოლო $P = \frac{x+y+z}{2}$. ცხადია, რომ სამკუთხედი, რომლის გვერდებია $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ და $\frac{1}{c}$ ჩვენი სამკუთხედის მსგავსია. მსგავსების კოეფიციენტი იქნება $2S$-ის ტოლი. მართლაც $\frac{x}{\frac{1}{a}} = ax = 2S$.

მაშინ მართობების შეფარდება იქნება $4S^2$. $\frac{S_1}{S} = \frac{1}{4S^2} \Longrightarrow S_1 = \frac{1}{4S}$, მაგრამ ჰერონის ფორმულითვე $S_1 = \sqrt{P_1\left(P_1 - \frac{1}{a}\right)\left(P_1 - \frac{1}{b}\right)\left(P_1 - \frac{1}{c}\right)}$, სადაც

$$P_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \Longrightarrow S = \frac{1}{4\sqrt{P_1\left(P_1 - \frac{1}{a}\right)\left(P_1 - \frac{1}{b}\right)\left(P_1 - \frac{1}{c}\right)}},$$

და შესაბამისად ამოცანის პასუხია:

$$x = \frac{1}{2a\sqrt{P_1\left(P_1 - \frac{1}{a}\right)\left(P_1 - \frac{1}{b}\right)\left(P_1 - \frac{1}{c}\right)}};$$

$$y = \frac{1}{2b\sqrt{P_1\left(P_1 - \frac{1}{a}\right)\left(P_1 - \frac{1}{b}\right)\left(P_1 - \frac{1}{c}\right)}};$$

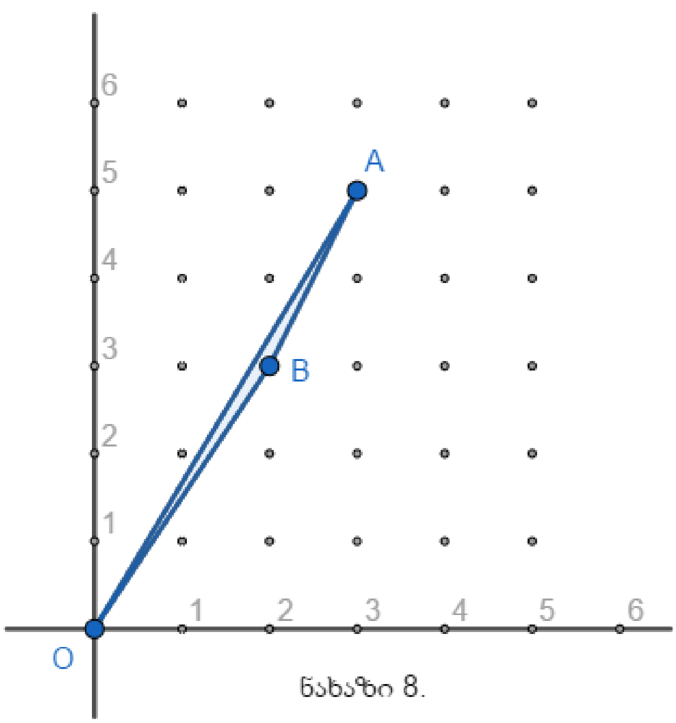
$$z = \frac{1}{2c\sqrt{P_1\left(P_1 - \frac{1}{a}\right)\left(P_1 - \frac{1}{b}\right)\left(P_1 - \frac{1}{c}\right)}}.$$

სადაც $P_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$.

ადილი მისახვედრია, რომ ΔABC-ს მახვილკუთხობის გამო ამოცანას აქვს ამონახსნი მხოლოდ მაშინ, როცა $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{1}{c^2}$; $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2}$; და $\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \geq \frac{1}{b^2}$.

<u>ამოცანა N7.</u> მოცემულია უკვეცი $\frac{p}{q}$ წილადი. განიხილება ყველა უკვეცი წილადი, რომლის მნიშვნელიც q-ს არ აღემატება. ამ წილადებიდან ამოირჩევა უმცირესი $\frac{x_1}{y_1}$, რომელიც $\frac{p}{q}$-ზე მეტია, ხოლო რომლებიც $\frac{p}{q}$-ს არ აღემატებიან (გარდა $\frac{p}{q}$-სი), ამოირჩევა უდიდესი - $\frac{x_2}{y_2}$ წილადი. დაამტკიცეთ, რომ $\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2} = \frac{p}{q}$.

<u>ამოხსნა:</u> გარდა ტრადიციული მეთოდებით ამოხსნისა, მოცემული ამოცანის გეომეტრიული ამოხსნის ეფექტურობა განსაკუთრებულია. შევურჩიოთ ნებისმიერ $\frac{x}{y}$ წილადს კოორდინატთა სიბრტყეზე წერტილი $(x; y)$ კოორდინატებით და გამოვიყენოთ პიკის ფორმულა, რომელიც ამბობს, რომ თუ მთელკოორდინატებიანი წვეროებით მოცემული ΔABC ისეთია, რომ მის გვერდებზე და შიგნით სხვა ასეთი წერტილი აღარაა, მაშინ $S_{ABC} = \frac{1}{2}$ (აღნიშნულის მიღება მარტივია).



ნახაზი 8.

ახლა განვიხილოთ $O(0;0)$, $A(p;q)$ და $B(x_1, y_1)$ წერტილები. ისინი პიკის ფორმულის პირობებს აკმაყოფილებენ, რადგან თუ ან OA ან OB ან AB გვერდზე იქნებოდა მთელკოეფიციენტებიანი წერტილი, დაირღვეოდა ან ა) $\frac{p}{q}$ და $\frac{x_1}{y_1}$ წილადის უწყვეტობა ან ბ) $\frac{x_1}{y_1}$ წილადის უმცირესობა შერჩეულ წილადებს შორის (იხ. ნახ. 8). მაშინ

$S_{AOB} = \frac{1}{2}$, მაგრამ ანალიზური გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ $S_{AOB} = \frac{1}{2}(x_1 q - y_1 p)$, საიდანაც ვიღებთ (1) ტოლობას $x_1 q - y_1 p =$ 1.

ანალოგიური მსჯელობით ΔOAD-თვის სადაც $D(x_2; y_2)$ მივიღებთ, რომ $S_{OAD} = \frac{1}{2}$. აქედან ვიღებთ (2) ტოლობას $x_2 q - y_2 p = -1$.

შევკრიბოთ მიღებული ტოლობები $x_1 q + x_2 q = y_1 p + y_2 p$, ანუ $(x_1 + x_2)q = (y_1 + y_2)p$, საიდანაც გამომდინარეობს დასამტკიცებელი ტოლობა:

$$\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = \frac{p}{q} \qquad \text{რ. დ. გ.}$$

საზოგადოდ, სამართლიანია პიკის ფორმულა ზოგადი შემთხვევისთვის, რომელიც შემდეგნაირად ყალიბდება: „მარტივი მრავალკუთხედის ფართობი, რომლის წვეროების კოორდინატები მთელი რიცხვებია, უდრის $j + \frac{r}{2} - 1$, სადაც j მრავალკუთხედის შიგნით მოთავსებული მთელკოორდინატებიანი წერტილების რაოდენობაა, ხოლო r - კი ასეთივე წერტილების რაოდენობა მის საზღვარზე.“

ამოცანა N8. $m, n \in \mathbb{N}$, n და m ურთიერთმარტივებია და $n < m$, რომელი რიცხვია მეტი?

$$\left[1 \cdot \frac{m}{n}\right] + \left[2 \cdot \frac{m}{n}\right] + \cdots + \left[n \cdot \frac{m}{n}\right] \quad \text{თუ} \quad \left[1 \cdot \frac{n}{m}\right] + \left[2 \cdot \frac{n}{m}\right] + \cdots + \left[m \cdot \frac{n}{m}\right].$$

ამოხსნა: (მთელკოორდინატებიან წერტილთა კიდევ ერთი ლამაზი სტრუქტურული სქემა). გავარჩიოთ დაწვრილებით უფრო ზოგადი ამოცანა: კერძოდ თუ p და q ურთიერთმარტივი მთელი რიცხვებია, მაშინ

$$\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{2p}{q}\right] + \left[\frac{3p}{q}\right] + \cdots + \left[\frac{(q-1)p}{q}\right] =$$

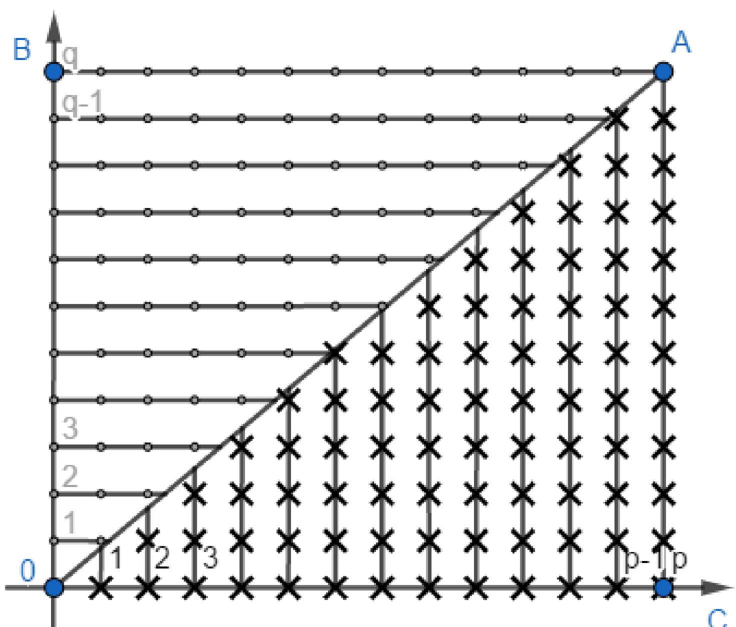
$$\left[\frac{q}{p}\right] + \left[\frac{2q}{p}\right] + \left[\frac{3q}{p}\right] + \cdots + \left[\frac{(p-1)q}{p}\right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

დეკარტის მართკუთხოვან სისტემაში ავიღოთ წერტილი $A(p; q)$, $(p, q) = 1$, $p, q \in \mathbb{N}$ და შევაერთოთ იგი კოორდინატთა სათავესთან. OA მონაკვეთი არც-ერთ მთელკოეფიციენტებიან წერტილს არ შეიცავს, რადგან $(p, q) = 1$. ამასთან, OA მონაკვეთის ის წერტილები, რომელთა ერთი მაინც კოორდინატი მთელია, იქნებიან $\left(1; \frac{q}{p}\right), \left(2; \frac{2q}{p}\right), \ldots, \left(p-1; \frac{(p-1)q}{p}\right)$.

აქედან ადვილია ვაჩვენოთ, რომ $a = \left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{2p}{q}\right] + \left[\frac{3p}{q}\right] + \cdots + \left[\frac{(q-1)p}{q}\right]$ რიცხვი აღნიშნავს ΔOBA-ს შიგნით მოხვედრილი მთელკოორდინატებიან წერტილთა რაოდენობას, ხოლო $b = \left[\frac{q}{p}\right] + \left[\frac{2q}{p}\right] + \left[\frac{3q}{p}\right] + \cdots + \left[\frac{(p-1)q}{p}\right]$ კი შესაბამისად ΔOAC-ს შიგნით (იხ. ნახ. 9) მოთავსებული მთელკოორდინატებიან წერტილთა რაოდენობას. ეს

წერტილები სულ გვაქვს $(p-1)(q-1)$ რაოდენობის, ხოლო ΔOBA-სა და ΔOCA-ს ცენტრული სიმეტრიულობით $D\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right)$ წერტილის მიმართ (რომელსაც მთელკოორდინატებიანი წერტილი გადაჰყავს ასეთივეში), ადასტურებს, რომ $a=b=\frac{(p-1)(q-1)}{2}$. ზოგადი ამოცანა დამტკიცებულია. დაგვრჩენია აღვნიშნოთ, რომ $\left[n\cdot\frac{m}{n}\right]=m$ და $\left[m\cdot\frac{n}{m}\right]=n$ და რადგან ამოცანის პირობით $n<m$, ამიტომ

$$\left[1\cdot\frac{m}{n}\right]+\left[2\cdot\frac{m}{n}\right]+\cdots+\left[n\cdot\frac{m}{n}\right]>\left[1\cdot\frac{n}{m}\right]+\left[2\cdot\frac{n}{m}\right]+\cdots+\left[m\cdot\frac{n}{m}\right],$$



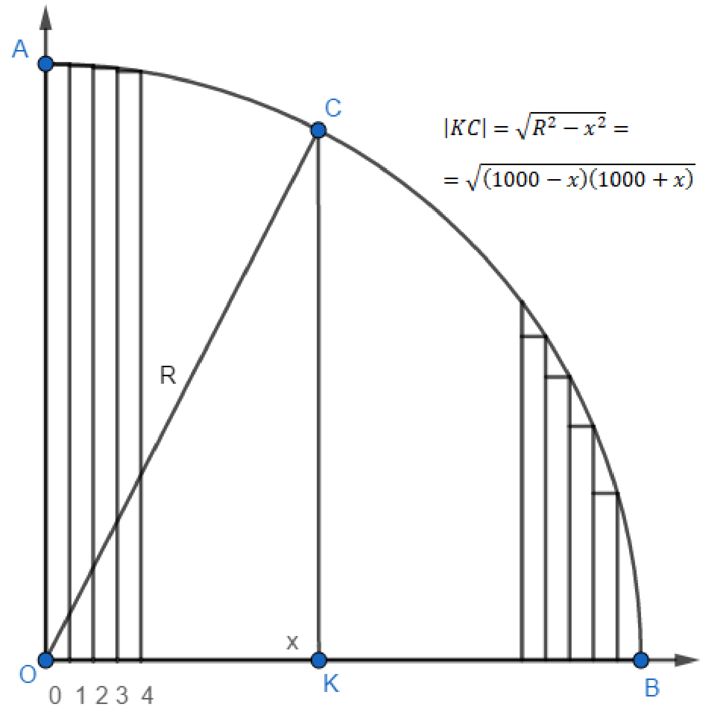
ნახაზი 9.

და მეტია $m-n$-ით.

შენიშვნა: ეს ამოცანა იხსნება იდენტურად, თუ კოორდინატთა სათავიდან გავავლებთ სხივს α კუთხით, სადაც $\tan\alpha=x$, ეს სხივი ცხადია გაივლის $A_1(n,nx)$ წერტილზე, განვიხილოთ I მეოთხედის ის მართკუთხედი, რომლის დიაგონალია OA_1. ამ მართკუთხედის შიგნით (OX და OY გვერდების გარდა) მოთავსებულია $n[nx]=nh$ წერტილი. დანარჩენი მსჯელობა მეორდება აწ უკვე ამოხსნილი ამოცანის ანალოგურად.

ამოცანა N9. დაამტკიცეთ უტოლობა.

$$\sqrt{1\cdot 1999}+\sqrt{2\cdot 1998}+\cdots+\sqrt{999\cdot 1001}<\pi\cdot 500^2$$



ნახაზი 10.

ამოხსნა: უტოლობაში π რიცხვის მონაწილეობა მიგვანიშნებს იმ გარემოებას, რომ გეომეტრიული წარმოდგენა აქ შესაძლებელია. ამასთან $\pi\cdot 500^2$ მიგვანიშნებს, რომ წარმოსადგენია წრის ფართობი, რომლის რადიუსი 500-თანაა დაკავშირებული, ამიტომ (ამისკენ უკვე გვიბიძგებს უტოლობის მარცხენა მხარე) ავირჩიოთ $R=1000$ და განვიხილოთ წრის მეოთხედი (იხ. ნახ. 10) მოთავსებული დეკარტის მართკუთხა საკოორდინატო სიბრტყის I მეოთხედში, ავმართოთ წრფეები $x=1; x=2; \dots; x=999$. ცხადია, (პითაგორას თეორემების თანახმად იხ. $|KC|$ მე-13 ნახაზიდან) რომ წრის შიგნით (I მეოთხედში) მოთავსებულ ამ წრფეთა მონაკვეთების სიგრძეები იქნება შესაბამისად $\sqrt{999\cdot 1001}$, $\sqrt{998\cdot 1002}$ და ა.შ. $\sqrt{2\cdot 1998}$ და $\sqrt{1\cdot 1999}$.

ახლა თუ გადაკვეთის წერტილებიდან X ღერძის პარალელურად გავატარებთ 1-ის ტოლ მონაკვეთებს, ცხადია მივიღებთ მართკუთხედებს, რომელთა ფართობების ჯამია $\sqrt{1\cdot 1999}+\sqrt{2\cdot 1998}+\cdots+\sqrt{999\cdot 1001}$ და რომელიც ნაკლებია მეოთხედ წრეწირის ფართობზე, რომელიც ცხადია უდრის

$$\frac{\pi\cdot 1000^2}{4}=\pi\cdot 500^2$$

უტოლობა დამტკიცებულია.

ამოცანა არაგეომეტრიული კონსტრუქციებით.

<u>ამოცანა N10.</u> იპოვეთ ნამდვილ რიცხვთა ყველა ის სამეული $(x_1; y_1; z_1)$, რომლისთვისაც ჭეშმარიტია ტოლობები.

$$\begin{cases} 18x_1 + x_1^2 y_1 = 9y_1 \\ 18y_1 + y_1^2 z_1 = 9z_1 \\ 18z_1 + z_1^2 x_1 = 9x_1 \end{cases}.$$

<u>ამოხსნა:</u> განვიხილოთ კონსტრუქცია, რომელიც ალგებრულ ამოცანას ტრიგონომეტრიის გამოყენებით ხსნის (სოროსის ოლიმპიადის დაუსწრებელი ტური 1999 წ.).

შემოვიტანოთ აღნიშვნები: $3x \equiv x_1$, $3y \equiv y_1$, $3z \equiv z_1$ და სისტემა შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$\begin{cases} 54x + 27x^2 y = 27y \\ 54y + 27y^2 z = 27z \\ 54z + 27z^2 x = 27x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + x^2 y = y \\ 2y + y^2 z = z \\ 2z + z^2 x = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2x}{1 - x^2} \\ z = \dfrac{2y}{1 - y^2} \\ x = \dfrac{2z}{1 - z^2} \end{cases}.$$

ტრივიალური $(0; 0; 0)$ ამონახსნის გარდა, სხვა ამონახსნების საპოვნელად შემოვიტანოთ ახალი აღნიშვნები. $x \equiv \tan\alpha$. ეს აღნიშვნა კორექტულია, რადგან $\tan\alpha$-ს მნიშვნელობათა სიმრავლე $= \mathbb{R}$. მაშინ

$$y = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \tan 2\alpha.$$

$$z = \frac{2\tan 2\alpha}{1 - \tan^2 2\alpha} = \tan 4\alpha \quad \text{და} \quad x = \frac{2\tan 4\alpha}{1 - \tan^2 4\alpha} = \tan 8\alpha.$$

ე.ი. მივიღეთ $(\tan\alpha = \tan 8\alpha) \Longrightarrow (7\alpha = \pi k) \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi k}{7}$. განვიხილოთ ერთმანეთისგან განსხვავებული ამონახსნები.

1) როცა $k = 1$, მაშინ $x = \tan\frac{\pi}{7}$; $y = \tan\frac{2\pi}{7}$; $z = \tan\frac{4\pi}{7}$.
2) როცა $k = 2$, მაშინ $x = \tan\frac{2\pi}{7}$; $y = \tan\frac{4\pi}{7}$; $z = \tan\frac{\pi}{7}$.
3) როცა $k = 3$, მაშინ $x = \tan\frac{3\pi}{7}$; $y = \tan\frac{6\pi}{7}$; $z = \tan\frac{5\pi}{7}$.
4) როცა $k = 4$, მაშინ $x = \tan\frac{4\pi}{7}$; $y = \tan\frac{\pi}{7}$; $z = \tan\frac{2\pi}{7}$.
5) როცა $k = 5$, მაშინ $x = \tan\frac{5\pi}{7}$; $y = \tan\frac{3\pi}{7}$; $z = \tan\frac{6\pi}{7}$.
6) როცა $k = 6$, მაშინ $x = \tan\frac{6\pi}{7}$; $y = \tan\frac{5\pi}{7}$; $z = \tan\frac{3\pi}{7}$.

როდესაც $k = 0$, მაშინ ძველ-ტრივიალურ ამონახნსაც ვღებულობთ. $x = y = z = 0$.

<u>პასუხი:</u> $(x; y; z)$ სამეულებია: $(0; 0; 0)$; $\left(\tan\frac{\pi}{7}; \tan\frac{2\pi}{7}; \tan\frac{4\pi}{7}\right)$; $\left(\tan\frac{2\pi}{7}; \tan\frac{4\pi}{7}; \tan\frac{\pi}{7}\right)$; $\left(\tan\frac{3\pi}{7}; \tan\frac{6\pi}{7}; \tan\frac{5\pi}{7}\right)$; $\left(\tan\frac{4\pi}{7}; \tan\frac{\pi}{7}; \tan\frac{2\pi}{7}\right)$; $\left(\tan\frac{5\pi}{7}; \tan\frac{3\pi}{7}; \tan\frac{6\pi}{7}\right)$; $\left(\tan\frac{6\pi}{7}; \tan\frac{5\pi}{7}; \tan\frac{3\pi}{7}\right)$.

<u>ამოცანა N11.</u> დაამტკიცეთ უტოლობა.

$$\sqrt{(1-x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (1-y)^2} \geq \sqrt{2}$$

როდის სრულდება ტოლობა?

<u>ამოხსნა:</u> ნახაზიდან გამომდინარე (იხ. ნახ. 11)

$AB = \sqrt{2}$;

$AC = \sqrt{(1-x)^2 + y^2}$;

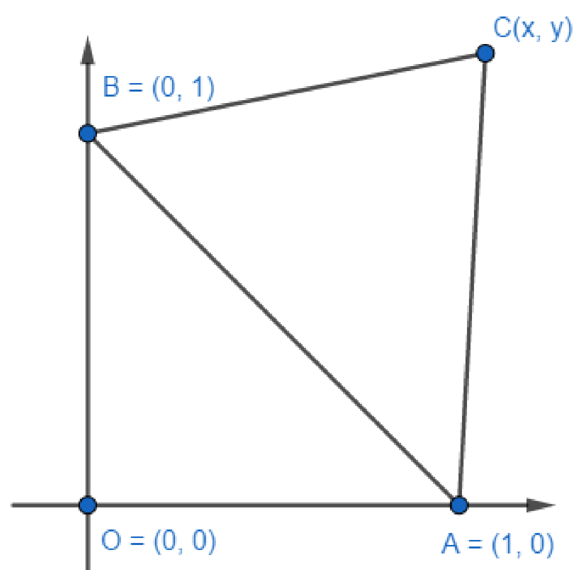
$BC = \sqrt{x^2 + (1-y)^2}$;

სამკუთხედის უტოლობით გვაქვს

$$BC + AC \geq AB\ .$$

ტოლობა შესრულდება, როცა C წერტილი იქნება AB მონაკვეთზე.

უტოლობა დამტკიცებულია.



ნახაზი 11.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. „Физико-математические олимпиады“ , „Знание“ М. 1977.
2. И. Ф. Шарыгин, „Геометрия“ Задачник 9-11 классы. „Дрофа“ М. 2001.
3. „Проложения к журналу Квант – Выпуск 1ч. Геометрия (Планиметрия). Бюро-Квантум. М. 1996.
4. სოროსის ოლიმპიადების ამოცანები. დაუსწრებელი ტური, 1999.
5. „Всесоюзные математические олимпиады“, „Наука“, М. 1986. XI класс.